ISSN 2658 – 7505
Выпуск №3, 2019
Электронный научный журнал «Вестник молодёжной науки России»

УДК 51-3

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ПОДХОДА

В.И. Наац, Е.Ю. Соломатин
Северо-Кавказский федеральный университет, г. Ставрополь

В данной статье рассматривается алгоритм решения дифференциальных уравнений на основе вариационного подхода, применяемых в задачах математической физики. Приводится построение вариационно-разностной вычислительной схемы краевой задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на основе метода конечных элементов. Рассматриваются примеры применения вариационных и проекционных методов в сочетании с методом конечных элементов для построения схем которые применяют к решению дифференциальных уравнений (краевых задач).

Ключевые слова: Вариационные методы, разностные методы, дифференциальные уравнения, краевая задача Коши.

CONSTRUCTION OF ALGORITHMS FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS BASED ON A VARIATIONAL APPROACH

V.I. Naac, E.Y. Solomatin
North-Caucasus Federal University, Stavropol

This article discusses an algorithm for solving differential equations based on a variational approach used in problems of mathematical physics. The construction of a variational-difference computational scheme of the Cauchy boundary-value problem for ordinary second-order differential equations based on the finite element method is given. We consider examples of the application of variational and projection methods in combination with the finite element method for constructing schemes that are applied to solving differential equations (problems boundary problems).

Key words: Variational methods, difference methods, differential equations, Cauchy boundary value problem.

Вариационные методы обладают хорошими качествами, такими как, сохранение у матриц возникающих систем свойств симметричности или положительной определённости, если ими обладал оператор исходной задачи. Другим важным свойством является возможность получения достаточно хороших приближений к решению задачи при небольшом числе базисных функций. Поэтому привлекательным становится конструирование таких алгоритмов приближённого решения задачи, которые, с одной стороны, по форме были бы вариационными, а с другой, чтобы эти алгоритмы приводили к системам уравнений, подобным системам в разностных методах, т.е. незначительное число элементов матриц этих систем были бы ненулевыми. Оказывается, что данное свойство часто достигается путём использования базисных функций с конечными носителями. В результате получается система уравнений, которая аппроксимирует исходную задачу, называемая вычислительной схемой. Если для получения этих схем привлекаются вариационные методы Ритца, то они будут вариационно-разностными схемами. Если применяются проекционные методы Галёркина, Галёркина-Петрова, метод моментов и другие, то они относятся к классу проекционно-сеточных вычислительных схем. Этот класс методов включает в себя также и вариационно-разностные схемы. Ниже будут рассмотрены примеры применения вариационных и проекционных методов в сочетании с методом конечных элементов для построения этих схем применительно к решению дифференциальных уравнений (краевых задач) [3,5,6].

Постановка задачи:

ISSN 2658 – 7505
Выпуск №3, 2019
Электронный научный журнал «Вестник молодёжной науки России»

$$\begin{cases} -u'' = \cos x \quad (Au = f) \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0,\ x \in [0,1] \end{cases}. \tag{1}$$

Для построения решения $u_n(x)$ задачи (1), аппроксимирующего обобщённое решение $u_0(x)$, построим вариационно-разностную схему на основе вариационного метода Ритца и метода конечных элементов. В соответствии с методом Ритца имеем [4]:

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x), \tag{2}$$

где $\{\varphi_k(x)\}_n$ – система базисных функций, а неизвестные постоянные $\{a_k\}_n$ определяются из решения СЛАУ:

$$\sum_{k=1}^{n} (A\varphi_j, \varphi_k) a_j = (f, \varphi_k),\ k = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где $A = -u''$, $f = \cos x$. Для решения (3) требуется определить систему $\{\varphi_k(x)\}_n$. В качестве базисных выберем кусочно-линейные функции, определённые в методе конечных элементов. Для этого построим сетку узлов на отрезке $[0,1]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_{n-1} < x_n = b. \tag{4}$$

В этом случае кусочно-линейный конечный элемент $\Omega_i = \{(x_{i-1}, x_{i+1}), \varphi_i(x)\}$ будет иметь вид:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_i - 1}{x_i - x_{i-1}},\ x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i},\ x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0,\ x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}, \tag{5}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0},\ x \in (x_0, x_1) \\ 0,\ x \notin (x_0, x_1) \end{cases},\ \varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}},\ x \in (x_{n-1}, x_n) \\ 0,\ x \notin (x_{n-1}, x_n) \end{cases}.$$

В общем случае,

$$\begin{cases} i = 0 \Rightarrow \Omega_i = (x_i, x_{i+1}) \\ i = \overline{1, n-1} \Rightarrow \Omega_i = (x_{i-1}, x_{i+1}). \\ i = n \Rightarrow \Omega_i = (x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

В соответствии с методом конечных элементов искомое решение системы $Au = f$ определяется так [4]:

$$u_n(x) = \psi(x) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x), \tag{6}$$

$$\psi(x_0 = a) = u(x_0 = 0) = 0,\ \psi(x_n = b) = u(x_n = 1) = 0$$

ISSN 2658 – 7505
Выпуск №3, 2019
Электронный научный журнал «Вестник молодёжной науки России»

Тогда СЛАУ с неизвестными коэффициентами $\{a_k\}$, $k=\overline{1,n-1}$ получит представление [2,4]:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(A\varphi_j,\varphi_k\right)a_j=\left(f,\varphi_k\right),\ k=\overline{1,n-1}, \tag{7}$$

$$\left(A\varphi_j,\varphi_k\right)=\left(-\varphi_j'',\varphi_k\right)=\int_{x_1}^{x_{n-1}}\left(-\varphi_j\right)''\varphi_k dx=\int_{\Omega_{jk}}\left(-\varphi_j\right)''\varphi_k dx,$$

$$\Omega_{jk}=\Omega_j\cap\Omega_k.$$

Аналогично

$$\left(f,\varphi_k\right)=\int_{\Omega_k}f(x)\cdot\varphi_k(x). \tag{8}$$

Вычислим выражение (8):

$$g_k=\left(f,\varphi_k\right)=\int_{\Omega_k}f(x)\cdot\varphi_k(x)dx=\int_{x_{k-1}}^{k_{k+1}}\cos(x)\cdot\varphi_k(x)dx=\int_{x_{k-1}}^{k_k}\cos(x)\cdot\varphi_k(x)dx+$$
$$+\int_{x_k}^{k_{k+1}}\cos(x)\cdot\varphi_k(x)dx=\int_{x_{k-1}}^{k_k}\cos(x)\cdot\left(\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\right)dx+\int_{x_k}^{k_{k+1}}\cos(x)\cdot\left(\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\right)dx, \tag{9}$$
$$k=\overline{1,n-1}.$$

После вычисления этих интегралов в Maple ответ будет такой:

$$g:=[0.195,\ 0.183,\ 0.164,\ 0.138].$$

В результате получаем СЛАУ $\sum_{j=1}^{n-1}r_{jk}a_j=g_k$, $k=\overline{1,n-1}$, решая которую в Maple, получаем вектор неизвестных коэффициентов $a:=[0.072,\ 0.105,\ 0.101,\ 0.064]$. Теперь можно вычислить приближённое решение исходного уравнения (1) с учётом краевых условий:

$$u_n(x)=u(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1}a_k\varphi_k(x)+u(x_n),$$

где x меняется от $a=0$ до $b=1$ с шагом $\frac{b}{2n}$, т.е. зададим ещё одну сетку узлов (сетка на сетке), переобозначив x в w: $w=0,1,\frac{1}{2\cdot 5}$; $w=(0,0.1,0.2,...,0.9,1)$. При этом учтём, что

$$\varphi_k(w)=\begin{cases}\dfrac{w-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}},\ w\in\left[x_{k-1},x_k\right]\\ \dfrac{x_{k+1}-w}{x_{k+1}-x_k},\ w\in\left[x_k,x_{k+1}\right]\end{cases}. \tag{10}$$

Результаты вычислений $u_n(w)$ занесём в таблицу 1.

Таблица 1

$x=w$	$u_n(x)$	$u_T(x=w)$

0	0	0
0.1	0.03600	0.04097
0.2	0.07200	0.07200
0.3	0.08847	0.09324
0.4	0.10494	0.10494
0.5	0.10304	0.10743
0.6	0.10115	0.10115
0.7	0.08281	0.08663
0.8	0.06446	0.06446
0.9	0.03223	0.03533
1	0	0

Точное решение исходного уравнения

$$-u'' = \cos(x),\ u(x=0)=0,\ u(x=1)=0,$$

полученное в Maple, имеет вид:

$$u = \cos(q) + 0.459q - 1.$$

Вычисления $u_T(x=w)$ приведены в таблице. Сравнивая результаты $u_n(x)$ и $u_T(x)$, видим, что в узлах в исходной сетки

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1.$$

значения совпадают, различие в значениях имеет место между узлами.

Рассмотрим задачу об отыскании непрерывной на $G = [a,b]$ функции $u(x)$ удовлетворяющей уравнению [1, 2]

$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u(x) = f(x) \tag{11}$$

с краевыми условиями

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{12}$$

В уравнении (1) $f(x) \in L_2(G)$, $p(x)$, $q(x)$ – ограниченные функции $0 < p_0 \le p(x) \le p_1$, $0 \le q(x) \le q_1$, p_0, p_1, q_1 – постоянные. Обозначим через A оператор задачи (1)-(2):

$$Au = -\frac{d}{dx}p\frac{du}{dx} + qu, \tag{13}$$

$D(A)$ – область определения оператора A. Пусть $D(A)$ состоит из непрерывных функций $u(x)$, обладающих производной $u'(x) \in L_2(G)$, таких, что $Au \in L_2(G)$, и удовлетворяющих краевым условиям (12). Тогда задачу (11)-(12) можно записать в виде операторного уравнения [2]

$$Au = f, \tag{14}$$

которое будем рассматривать в гильбертовом пространстве $H = L_2(G)$ со скалярным произведением $(u,v)_A$ и нормой $\|u\|_A$.

Рассмотрим свойства оператора A, определяемого выражением (13). Множество $D(A)$ – плотно в $L_2(G)$. Оператор A является симметричным, т.е. выполняется свойство $(Au,v) = (u,Av) = (Av,u)$. [2, 4]

Оператор A является также положительно-определённым, т.е. для него выполняется условие

$$\gamma^2 \|u\|^2 \le (Lu,u),\ u \in D(A),$$

где $\gamma > 0$ – постоянная, не зависящая от $u(x)$.

Задача (11)-(12) в соответствии с методом Ритца сводится к проблеме минимизации функционала [4]

$$F(u) = (u,u)_A - 2(u, f),$$

где $(u,u)_A = (Au,u)$ – определяется выражением (8) при $v = u$. Данная проблема о минимизации $F(u)$ имеет единственное решение в силу свойств оператора A.

Зададим кусочно-линейные базисные функции. Для этого построим сетку узлов на $[a,b]$:

$$\{x_i\}_n,\ x_i = a + i\Delta x,\ \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Поставим в соответствие каждому узлу кусочно-линейную базисную функцию в соответствии с методом конечных элементов [1]:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}. \qquad (19)$$

В соответствии с теорией метода Ритца за приближённое решение задачи (11)-(12) можно принять функцию [2]

$$u_n(x) = u_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \varphi_i(x) + u_n, \qquad (20)$$

где $u_0 = u(a) = 0$ и $u_n = u(b) = 0$. Данная функция будет минимизировать функционал $F(v)$. Коэффициенты $\{a_i\}$, $i = \overline{1, n-1}$, находятся из условий $\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 0$, которые приводят к СЛАУ вида:

$$Ra = g, \qquad (21)$$

где R – матрица размером $(n-1)\times(n-1)$ с элементами $\{r_{ij}\}$, $a = (a_1, a_2, ..., a_{n-1})^T$, $g = (g_1, g_2, ..., g_{n-1})^T$,

$$r_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_A = (A\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \left(p \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} + q \cdot \varphi_i \cdot \varphi_j \right) dx = \qquad (22)$$

$$= \int_{\Omega_{ij}} \left(p \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_j}{dx} + q \cdot \varphi_i \cdot \varphi_j \right) dx,$$

$$\Omega_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j,\ i, j = \overline{1, n-1},$$

Ω_i, Ω_j – конечные носители базисных функций φ_i и φ_j соответственно.

ISSN 2658 – 7505
Выпуск №3, 2019
Электронный научный журнал «Вестник молодёжной науки России»

$$g_j = (f, \varphi_j) = \int_a^b f\varphi_j dx = \int_{\Omega_j} f\varphi_j dx \cdot \qquad (23)$$

Поскольку элементы r_{ij} и g_j – это интегралы от известных функций, то после их вычисления система (21) будет полностью определена. Так как в методе Ритца матрица системы R сохраняет свойства оператора A, а именно, симметричность и положительную определённость, то можно гарантировать, что система (21) имеет единственное решение $a = (a_1, a_2, ..., a_n)^T$, которое однозначно определяет приближённое решение $u_n(x)$ (10). Отметим также, что $r_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$, поскольку в этом случае носители Ω_i и Ω_j базисных функций φ_i и φ_j не пересекаются. Это означает, что матрица R оказывается трёхдиагональной и решить систему $Ra = g$ можно методом прогонки, который специально предназначен для таких систем. [4,6] В результате СЛАУ $Ra = g$ полностью определена. Решением системы будет $a = (a_1, ..., a_{n-1})^T$. Окончательно получим $u_n(x) = u_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\varphi_i(x) + u_n$ – приближённое решение уравнения (11).

Список цитируемой литературы

1. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. Учебное пособие для студентов втузов. М.: Высшая школа. – 1990. – 544 с.
2. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране. Москва: МИР. – 1977. – 520 с.
3. Наац В.И. Математические модели и вычислительный эксперимент в проблеме контроля и прогноза экологического состояния атмосферы. / Наац В.И., Наац И.Э., Рыскаленко Р.А., Ярцева Е.П. – Ставрополь: Изд-во СКФУ, - 2015. – 378 с.
4. Наац, В.И., Ярцева Е.П. Метод численного обращения интегрального уравнения с оператором в форме интеграла Лебега-Стилтьеса// Наука сегодня: постулаты прошлого и современные теории как механизм эффективного развития в условиях кризиса: сборник научных статей по итогам международной научно – практической конференции. – Санкт – Петербург. – 2016. – С. 86 – 91.
5. Наац В.И., Наац И.Э., Рыскаленко Р.А.. Вычислительная модель для дифференциального уравнения с эмпирическими функциями на основе интегрального уравнения Фредгольма первого рода// Наука. Инновации. Технологии: Научный журнал СКФУ- №2. - 2016. – С. 37-48.
6. Наац В.И., Наац И.Э., Рыскаленко Р.А.. Метод численного решения краевой задачи для уравнения в частных производных с эмпирическими функциями на основе интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Наука. Инновации. Технологии: Научный журнал СКФУ. - №3. - 2016. – С. 113-126. 7. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2004. – 400 с.