



УДК 620.179.16

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В МЕЛКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ

А.В. Вагин, К.Е. Аббакумов, e-mail: av.vagin@bk.ru

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), г. Санкт-Петербург

В данной статье рассматривается вопрос о распространении упругих волн в мелкослоистой среде сталь-графит. В работе исследовано распространение продольной волны в мелкослоистой среде с однородными граничными условиями параллельно слоям различной толщины и параметров материалов. Выведено и решено относительно волнового числа новое дисперсионное уравнение с ранее не учитываемыми поправками для определения скорости распространения продольной волны в мелкослоистой среде. Полученное уравнение используется применительно к задачам нахождения основных физико-механических характеристик среды. Получено выражение для скорости продольной волны в мелкослоистой среде путём замены тригонометрических функций их аргументами. Проанализированы и сопоставлены с результатами, полученными ранее в журнальных статьях и монографиях графические зависимости эффективных скоростей волн сжатия от относительной толщины слоя и параметров материалов. Расчёты проводились для общей толщины слоя сталь-графит равной 1 мм на частоте ультразвука 1 МГц.

Ключевые слова: дисперсионное уравнение, упругие волны, волновое число, мелкослоистая среда, скорость распространения

WAVE PROCESSES IN A FINE-LAYERED MEDIUM

A.V. Vagin, K.E. Abbakumov

Saint-Petersburg state electrotechnical university «LETI», Saint-Petersburg

This article addresses the issue of the propagation of elastic waves in a fine-layered steel-graphite medium is considered. The propagation of a longitudinal wave in a finely layered medium with homogeneous boundary conditions parallel to layers of different thickness is investigated. A new dispersion equation with previously unrecorded corrections for determining the propagation velocity of a longitudinal wave in a finely layered medium is derived and solved with respect to the wave number. The obtained equation is used with reference to the problems of finding the basic physic-mechanical characteristics of the medium. An expression is obtained for the velocity of a longitudinal wave in a finely layered medium by replacing trigonometric functions by their arguments. Analyzed and compared with the results obtained earlier in journal articles and monographs are graphical dependences of the effective velocities of compression waves on the relative thickness of the layers. Calculations were carried out for a total thickness of the steel-graphite layer equal to 1 mm at an ultrasound frequency of 1 MHz.

Keywords: dispersion equation, elastic waves, wave number, fine-layered medium, propagation speed

Одним из важнейших направлений неразрушающего контроля качества материалов, деталей, изделий и конструкций является структуроскопия, основанная на контроле физико-механических свойств исследуемых материалов. Контроль физико-механических характеристик акустическими методами контроля основан на аналитических связях измеренных акустических параметров с оцениваемыми свойствами материала. При четкой аналитической связи контролируемое свойство может быть определено с высокой точностью. Так, все три упругих постоянных материала (модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона) однозначно определяются по измеренным значениям скоростей распространения продольной и поперечной волн. Мелкослоистые среды, изготовление которых не сложно, а свойства могут быть очень разнообразны (анизотропия скоростей рас-



пространения и поглощений как для волн сжатия, так и для волн сдвига), представляют практический интерес в акустике (проблемы виброизоляции, ультразвука) и в сейсмологии.

Целью статьи является определение скорости продольной волны в мелкослоистой среде через решение дисперсионного уравнения относительно волнового числа, которое выведено с некоторыми поправочными членами, которые ранее не учитывались.

В отношении своих упругих свойств мелкослоистая среда является аналогом кристалла гексагональной симметрии, то есть для описания её упругого поведения необходимо и достаточно задать 5 упругих постоянных [1].

К нахождению упругих модулей мелкослоистой среды можно подойти differently. Один из способов заключается в предположении периодичности повторения слоёв. Задача о распространении волн приводится тогда к решению волнового уравнения с периодическими коэффициентами. Так как внутри слоёв параметры постоянны и меняются скачком только на границах между слоями, решение может быть найдено в общем случае для не тонких слоёв [2]. Таким способом была рассмотрена задача об электромагнитных свойствах мелкослоистой среды, описываемых однократно вырожденными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей [3].

При распространении акустической волны в твёрдой мелкослоистой среде кроме трёх поперечных волн (волн сдвига) имеются ещё две продольных волны (волны сжатия). Тем не менее, если ограничиться распространением волн только в направлениях, перпендикулярном и параллельном слоям, причем в последнем случае – при двух поляризациях, то можно определить лишь четыре из пяти упругих постоянных:

$$c_{xx}^2 = \frac{\lambda_2}{\rho}, \quad c_{xz}^2 = \frac{\lambda_5}{\rho}, \quad c_{xy}^2 = \frac{\lambda_4}{\rho}, \quad c_{zz}^2 = \frac{\lambda_1}{\rho}.$$

Для определения λ_3 необходимо знать скорости распространения под углом к оси z , отличным от 0 и $\pi/2$. Общая толщина среды принималась равной 1 мм. Частота ультразвука – 1 МГц.

Пусть свойства мелкослоистой среды (плотность, параметры Лямэ) являются периодическими функциями z с периодом $h = a + b$, малым по сравнению с длиной волны, то есть [1]:

$$\rho(z+h) = \rho(z), \quad \lambda(z+h) = \lambda(z), \quad \mu(z+h) = \mu(z).$$

Рассмотрим распространение продольной волны в мелкослоистой среде типа «сталь-графит» параллельно слоям z в направлении оси x (рис.1).

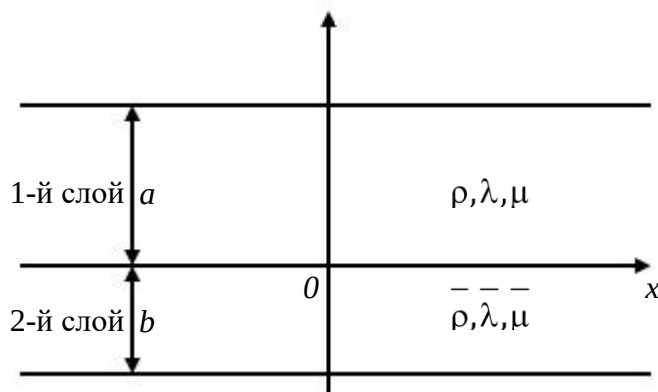


Рис. 1 – Слоистая структура

На рис. 1 a – толщина первого слоя; b – толщина второго слоя; ρ – плотность; λ, μ – параметры Лямэ. Соответствующие параметры во второй среде обозначены с чертой сверху.

Общее решение для волнового уравнения для продольной и поперечных волн запишем через специально выбранные частные решения, а именно – чётное и нечётное относительно середин слоёв. Для первого слоя имеем:

$$\xi_{lx} = P(z)e^{-ikx}, \xi_{lz} = \frac{P'(z)}{ik}e^{-ikx}, \xi_{tx} = -\frac{Q'(z)}{ik}e^{-ikx}, \xi_{tz} = Q(z)e^{-ikx}, \quad (1)$$

где ξ_{lx}, ξ_{lz} – продольные смещения, а ξ_{tx}, ξ_{tz} – поперечные смещения. Причём

$$P(z) = A \cos \alpha \left(z - \frac{a}{2} \right) + B \sin \alpha \left(z - \frac{a}{2} \right), \quad \alpha^2 = k_l^2 - k^2, \quad (2)$$

$$Q(z) = C \cos \beta \left(z - \frac{a}{2} \right) + D \sin \beta \left(z - \frac{a}{2} \right), \quad \beta^2 = k_t^2 - k^2,$$

где A, B, C, D – пока неопределённые постоянные, k_l, k_t – волновые числа продольной и поперечной волны соответственно.

Как видно, в последних двух выражениях выделена симметричная и антисимметричная части относительно середины слоя. В слое два уравнения (1) будут аналогичными, но с чертой сверху. Выражения (2) во второй среде будут иметь вид:

$$\overline{P(z)} = \overline{A} \cos \overline{\alpha} \left(z + \frac{b}{2} \right) + \overline{B} \sin \overline{\alpha} \left(z + \frac{b}{2} \right), \quad \overline{\alpha}^2 = \overline{k}_l^2 - k^2, \quad (3)$$

$$\overline{Q(z)} = \overline{C} \cos \overline{\beta} \left(z + \frac{b}{2} \right) + \overline{D} \sin \overline{\beta} \left(z + \frac{b}{2} \right), \quad \overline{\beta}^2 = \overline{k}_t^2 - k^2.$$

Для мелкослоистой среды в указанном направлении распространения волны компоненты тензора механических напряжений определяются через следующие выражения [2]:



$$\sigma_{xz} = 2\mu \left(P'(z) + \frac{k^2 - \beta^2}{2ik} Q(z) \right) e^{-ikx}, \sigma_{yz} = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_{zz} = \left(\frac{\lambda k_l^2 + 2\mu\alpha^2}{ik} P(z) + 2\mu Q'(z) \right) e^{-ikx}.$$

Аналогичным образом выражаются компоненты тензора механических напряжений во втором слое.

На границе между слоями для $\xi_{lx}, \xi_{lz}, \xi_{tx}, \xi_{tz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ должны выполняться, во-первых, условия непрерывности [2]:

$$\xi_x(0) = \overline{\xi_x(0)}, \quad \sigma_{xz}(0) = \overline{\sigma_{xz}(0)}, \quad (5)$$

$$\xi_z(0) = \overline{\xi_z(0)}, \quad \sigma_{zz}(0) = \overline{\sigma_{zz}(0)},$$

и, во-вторых, условия периодичности:

$$\xi_x(a) = \overline{\xi_x(-b)}, \quad \sigma_{xz}(a) = \overline{\sigma_{xz}(-b)}, \quad (6)$$

$$\xi_z(a) = \overline{\xi_z(-b)}, \quad \sigma_{zz}(a) = \overline{\sigma_{zz}(-b)}.$$

Подставляя соответствующие выражения в граничные условия получаем 8 уравнений для постоянных $A, B, C, D, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$, которые распадаются на две независимые группы: для продольной и поперечной волны.

Для продольной волны коэффициенты $B = C = \overline{B} = \overline{C} = 0$. В этом случае продольные смещения чётны (симметричны) относительно середин слоёв, в то время как поперечные нечётны (антисимметричны), благодаря чему «в среднем», то есть в случае достаточно тонких слоёв, имеет место только сжатие, а сдвиг отсутствует. Тогда подставляя уравнения (1), (4) с учётом выражений (2), (3) в граничные условия (5) получим систему из четырех уравнений для определения постоянных $A, D, \overline{A}, \overline{D}$. Очевидно, что система четырех уравнений является однородной и совместной, то есть всегда имеет решение. Составим детерминант из этих четырех уравнений и приравняем его к нулю:

$$\begin{vmatrix} ik \cos \alpha \left(\frac{a}{2} \right) & -\beta \cos \beta \left(\frac{a}{2} \right) & ik \cos \overline{\alpha} \left(\frac{b}{2} \right) & -\overline{\beta} \cos \overline{\beta} \left(\frac{b}{2} \right) \\ \alpha \sin \alpha \left(\frac{a}{2} \right) & -ik \sin \beta \left(\frac{a}{2} \right) & -\overline{\alpha} \sin \overline{\alpha} \left(\frac{b}{2} \right) & ik \sin \overline{\beta} \left(\frac{b}{2} \right) \\ 2\mu\alpha ik \sin \alpha \left(\frac{a}{2} \right) & \mu(k^2 - \beta^2) \sin \beta \left(\frac{a}{2} \right) & -2\mu\overline{\alpha} ik \sin \overline{\alpha} \left(\frac{b}{2} \right) & \overline{\mu}(\overline{k}^2 - \overline{\beta}^2) \sin \overline{\beta} \left(\frac{b}{2} \right) \\ (\lambda k_l^2 + 2\mu\alpha^2) \cos \alpha \left(\frac{a}{2} \right) & 2\mu\beta ik \cos \beta \left(\frac{a}{2} \right) & (\overline{\lambda} \overline{k}_l^2 + 2\mu\overline{\alpha}^2) \cos \overline{\alpha} \left(\frac{b}{2} \right) & 2\mu\overline{\beta} ik \cos \overline{\beta} \left(\frac{b}{2} \right) \end{vmatrix} = 0$$

Тогда вычисляя данный определитель с учётом граничных условий (6) разложением по первой строке, получим дисперсионное уравнение, определяющее значение волнового числа k , то есть значение скорости распространения волны сжатия $c_l = \omega/k$, где ω - частота:



$$4(\mu - \bar{\mu})^2 X \bar{X} + \omega^2 \rho \left[\frac{\omega^2 \bar{\rho}}{k^2} - 4(\mu - \bar{\mu}) \right] \bar{X} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\beta a}{2} \right) + \omega^2 \bar{\rho} \left[\frac{\omega^2 \bar{\rho}}{k^2} + 4(\mu - \bar{\mu}) \right] X \times \\ \times \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{\beta} b}{2} \right) - \frac{\omega^4 \rho \bar{\rho}}{k^2 k_l^2} \left[Y \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{\beta} b}{2} \right) + \bar{Y} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\beta a}{2} \right) \right] = 0, \quad (7)$$

где введены следующие обозначения

$$X = k^2 \operatorname{tg} \left(\frac{\beta a}{2} \right) + \alpha \beta \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha a}{2} \right), \quad \bar{X} = k^2 \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{\beta} b}{2} \right) + \bar{\alpha} \bar{\beta} \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{\alpha} b}{2} \right), \\ Y = k^2 \operatorname{tg} \left(\frac{\beta a}{2} \right) - \bar{\alpha} \beta \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{\alpha} b}{2} \right), \quad \bar{Y} = k^2 \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{\beta} b}{2} \right) - \alpha \bar{\beta} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha a}{2} \right).$$

Уравнение (7) определяет k при любых значениях толщин слоёв a и b в рассматриваемой периодической структуре. Решив дисперсионное уравнение относительно k с учётом соответствующих параметров сред 1 и 2, построим графическую зависимость эффективной скорости продольной волны c_l от относительной толщины слоя $n = \frac{a}{a+b}$ (рис.2).

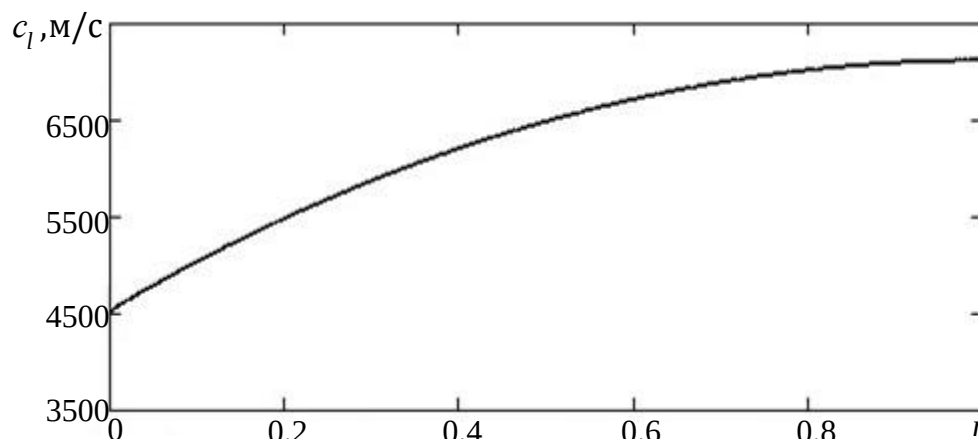


Рис. 2 – Зависимость скорости продольной волны от относительной толщины слоя

В решении подобной задачи у Бреховских Л.М. в монографии «Волны в слоистых средах» данная зависимость приведена с некоторыми неточностями, заключающимися в том, что при увеличении относительной толщины слоя n зависимость начинает убывать, то есть стремится к значению скорости в графите, что не соответствует физическому смыслу при сплошном контакте на границе между рассматриваемыми средами.

В работе [1] дисперсионное уравнение имеет вид:

$$4(\mu - \bar{\mu})^2 X \bar{X} + \omega^2 \rho \left[\frac{\omega^2 \bar{\rho}}{k^2} - 4(\mu - \bar{\mu}) \right] \bar{X} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\beta a}{2} \right) + \omega^2 \bar{\rho} \left[\frac{\omega^2 \bar{\rho}}{k^2} + 4(\mu - \bar{\mu}) \right] X \times \\ \times \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{\beta} b}{2} \right) - \frac{\omega^4 \rho \bar{\rho}}{k^2} \left[Y \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{\beta} b}{2} \right) + \bar{Y} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\beta a}{2} \right) \right] = 0.$$



Решая данное уравнение относительно волнового числа с учётом соответствующих параметров сред 1 и 2, в качестве которых рассматриваем сталь-графит, построим графическую зависимость эффективной скорости продольной волны c_l от относительной толщины слоя n (рис.3).

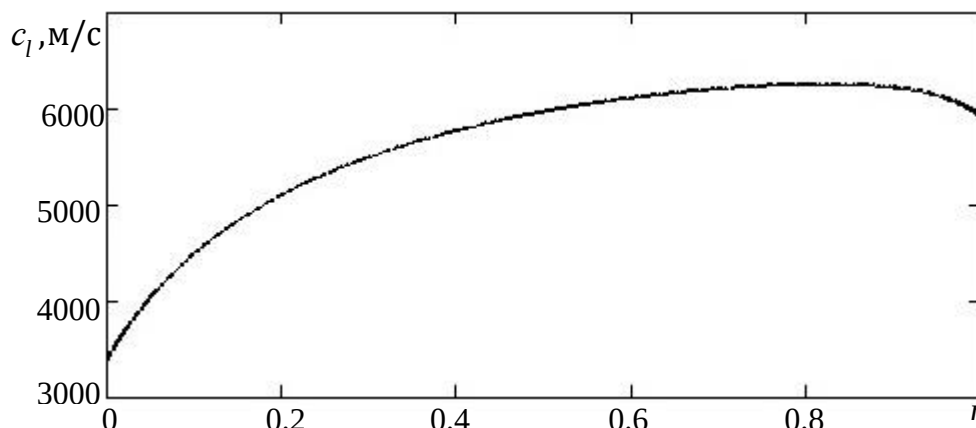


Рис. 3 – Зависимость скорости продольной волны от относительной толщины слоя по монографии Л.М. Бреховских

Как видно, данная зависимость действительно отличается от зависимости, приведенной на рисунке 2. При значении $n = 0.9$ зависимость начинает убывать, чего не должно быть при классических граничных условиях, учитывающих полную передачу составляющих упругих смещений и механических напряжений на границе между слоями.

Переход к мелкослоистой среде соответствует замене всех тангенсов их аргументами. Это приводит к существенному упрощению дисперсионного уравнения и даёт следующее выражение для квадрата эффективной скорости волны сжатия для мелкослоистой среды [4]:

$$c_{lm}^2 = \frac{h \left(\frac{a}{\lambda + 2\mu} + \frac{b}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right)^{-1}}{\rho} \cdot \left[1 + \left(\frac{4ab}{h^2} \right) (\mu - \bar{\mu}) (\mu + \lambda - \bar{\mu} - \bar{\lambda}) (\lambda + 2\mu)^{-1} (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})^{-1} \right],$$

$$\text{где } h = a + b, \rho = \frac{a\rho + b\bar{\rho}}{h}.$$

Представим графическую зависимость эффективной скорости продольной волны для мелкослоистой среды c_{lm} от относительной толщины слоя n (рис.4).

$$c_{lm}, \text{ м/с}$$

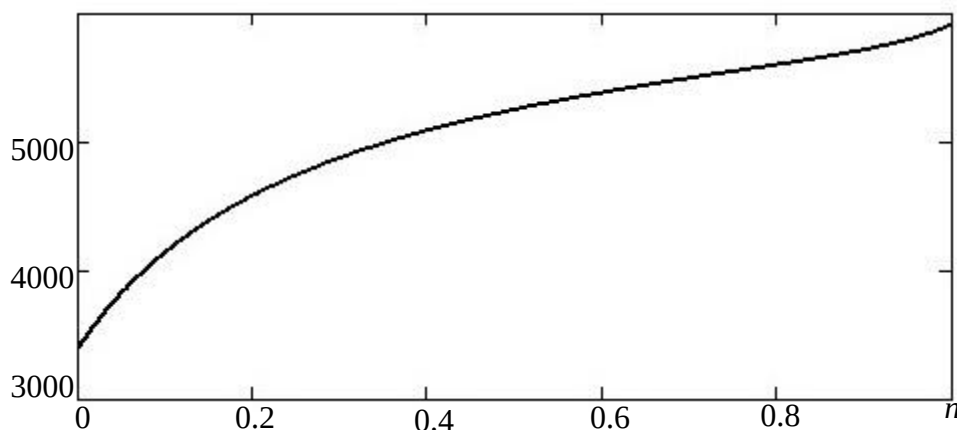


Рис. 4 – Скорость продольной для мелкослоистой среды

Так как внутри слоёв параметры постоянны и меняются скачком только на границах между слоями, решение может быть найдено в общем случае не тонких слоёв. В результате предельного перехода из выражения (7) вытекает решение для мелкослоистой среды, причем учёт поправочных членов позволяет уточнить условия применимости указанных предельных результатов в акустике, акустооптике, авиации и космической технике, а также в сейсмологии.

В работе выведено новое дисперсионное уравнение для продольной волны, распространяющейся в слоистой среде с однородными граничными условиями, которое ранее приводило к неверным зависимостям эффективной скорости волны от относительной толщины слоя и параметров материалов. Путём замены тригонометрических функций их аргументами получено выражение для эффективной скорости волны сжатия для мелкослоистой среды. Полученные зависимости могут быть использованы при решении задач определения физико-механических характеристик материалов на основе акустических измерений. Анализ показал, что получаемые с помощью найденных скоростей физико-механические характеристики сопоставимы с теоретическими значениями для рассматриваемых материалов [5].

Список цитируемой литературы

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973, 343 с.
2. Рытов С.М. Акустические свойства мелкослоистой среды // Акуст. Журн. 1964. Т.10, №1, С. 16-18.
3. Evel'son R.L. A fine-layered medium of finite-thickness in an electromagnetic field // Journal of Communications Technology and Electronics. June 2015. Vol. 60, No. 6, p. 552-559.
4. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред М.: Наука, 1989, 412 с.
5. Аббакумов К.Е., Пушилина М.Я. Волновые процессы на границах структурированных сред на примере двух моделей: поглощающей и мелкослоистой сред // Изв. ЛЭТИ. 2015. Вып. 5. С. 74-77.

© А.В. Вагин, К.Е. Аббакумов, 2019