



УДК 519.6:371.214

## К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ РАСПИСАНИЯ В СРЕДНЕЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

*Д.Н. Кушчий, [dkushchiy@rambler.ru](mailto:dkushchiy@rambler.ru), И.А. Спиридонова, [sia1706@yandex.ru](mailto:sia1706@yandex.ru),*

*Д.Ю. Щебет, [gameboy1443gmail.com](mailto:gameboy1443gmail.com)*

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)

имени М.И. Платова, г. Новочеркасск

В статье проведен анализ задачи составления расписания в школе. Определен ее тип согласно общепринятой классификации соответствующего раздела дискретной математики. Проанализированы влияющие на решение жесткие и нежесткие ограничения, обусловленные как фундаментальными основами теории расписаний в общей постановке задачи, так и зависимостью расписания от предельных значений максимальной аудиторной нагрузки школьников и сложностью самих предметов. Приводятся основные категории методов, используемых для решения NP-полных многоэкстремальных комбинаторных задач, с указанием недостатков известных подходов. Предложена математическая постановка задачи с учетом введенного множества ограничений.

**Ключевые слова:** теория расписаний, расписание учебных занятий, оптимальное решение

## ON CONSTRUCTING A MATHEMATICAL MODEL OF SYSTEM TO FORMATION OF THE SCHEDULE IN THE SECONDARY SCHOOL

*D.N. Kushchiy, I.A. Spiridonova, D.Yu. Shchebet*

Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk

The article analyzes the task of scheduling at school. Its type is determined according to the generally accepted classification of the corresponding section of discrete mathematics. The rigid and non-rigid constraints affecting the solution are analyzed, due both to the fundamental fundamentals of the theory of timetables in the general formulation of the problem, and the schedule's dependence on the limiting values of the maximum classroom load of schoolchildren and the complexity of the subjects themselves. The main categories of algorithms used to solve NP-complete multi-extremal combinatorial problems, with an indication of the disadvantages of the known approaches, are given. A mathematical formulation of the problem is proposed, taking into account the set of constraints introduced.

**Keywords:** scheduling theory, disrupting school time, optimum decision

Уровень организации учебного процесса влияет на усвоение материала учащимися и на эффективность работы преподавательского состава. Базовой задачей в планировании и оптимизации процедуры обучения является составление расписания.

На сегодняшний день существует несколько десятков программных продуктов [1], позволяющих формировать расписание в автоматизированном режиме. Однако ни один из них не учитывает, в полной мере, специфику учебного заведения, и результат работы не всегда отвечает критериям оптимальности, в силу чего проводится дополнительная доработка вручную.

В основе составления расписания занятий лежит раздел дискретной математики, занимающийся проблемами упорядочения, - теория расписания [2]. Расписание занятий, с точки зрения формализации, представляет собой процедуру определения на шкале времени места проведения занятий по заданным предметам с учетом имеющихся требований.

В качестве исходных данных для составления расписания выступают списки классов учеников, предметов, а также нормы предельной учебной нагрузки. Ресурсы, с помощью которых ищется решение, представлены списком



учителей-предметников, работающих в заданных классах, списком кабинетов, количеством учебных дней в неделю.

Составление расписания заключается в распределении наиболее удобным образом имеющихся ресурсов в соответствии с запросами и выделении времени для занятий каждому классу. Существование удачно составленных расписаний говорит о том, что сама задача разрешима, или, по крайней мере, имеет допустимые решения [3].

Составление расписания относится к задачам целочисленного программирования, сложность решения которых растет экспоненциально с ростом числа и возможных значений варьируемых.

С помощью точных (классических) методов и алгоритмов возможно получение точной математической модели, отвечающей всем ограничениям, но в силу NP-сложного характера задачи составления расписания эта модель будет громоздкой и сложной.

Расписание — это сетка уроков, по которой распределены занятия. Допустим, количество мест в сетке равно количеству занятий (табл. 1), тогда только для распределения девяти занятий по трем дням недели и трем урокам существует  $9! = 362880$  различных вариантов перестановок.

Таблица 1

**Связи между сущностями концептуальной модели информационной системы учета автомобилей в автосервисе**

Номер урока / День недели	Понедельник	Вторник	Среда
Урок 1	Предмет 1	Предмет 2	Предмет 3
Урок 2	Предмет 4	Предмет 5	Предмет 6
Урок 3	Предмет 7	Предмет 8	Предмет 9

Кроме того, для модели расписания учебного процесса характерно наличие большого объема различной по своему составу исходной информации и большого числа требований, с трудом поддающихся формализации. Указанные сложности препятствуют автоматизации процедуры составления расписания, несмотря на наличие широкого спектра методов целочисленного программирования [4].

Более эффективным является составление расписания с помощью имитационного моделирования. В этом случае алгоритм оперирует непосредственно расписанием и списком занятий, которые необходимо включить в расписание (учебным планом). Процесс составления начинается с пустого расписания, когда все занятия находятся в списке неучтенных занятий.

Школьное расписание оценивается положительно, если выполнены основные требования:

- неравномерность распределения учебной нагрузки в течение недели;
- один или два «пика» (не более двух) распределения недельной нагрузки, за исключением понедельника и пятницы (субботы);
- один день с наименьшей учебной нагрузкой, минимальная нагрузка в конце недели (в пятницу или субботу) [5].

Ограничения для составления расписания [6]:



- нельзя проводить занятия у двух классов в одном кабинете и в одно время;
- нельзя ставить два или более предмета в одно и то же время у одного класса;
- один учитель не может вести предметы у двух классов одновременно;
- количество уроков в день у учителя не должно превышать 8;
- количество уроков в день у класса не должно превышать 8.

Введем ряд обозначений, необходимых для определения математической модели [7, 8]:

- $k_r$  – номер класса в параллели  $r$ ,  $r = 1, \dots, R$ ,  $k_r = 1, \dots, G_r$ ;
- $T_{kr}$  – множество учебных дней для класса  $k_r$ ;
- $t$  – номер учебного дня недели,  $t \in T_{kr}$ ;
- $j$  – номер урока,  $j = 1, \dots, J$ ;
- для каждого  $k_r$  параллели  $r$  в течение недели, согласно учебному плану, проводится  $W_{kr}$  занятий;
- $q_{kr}$  – предмет в списке дисциплин для класса  $k_r$ ,  $q_{kr} = 1, \dots, Q_{kr}$ ;
- $p$  – номер учителя,  $p = 1, \dots, P$ . Обозначим  $\delta_{k_r q_{kr}}^p$  урок  $q_{kr}$ , проводимый

учителем  $p$ , в классе  $k_r$ . Для каждого учителя  $p$  задана его аудиторная нагрузка –  $N_p$  часов в неделю.

Занятия могут проводиться только в определенных кабинетах (например, для информатики требуется кабинет, оснащённый компьютерами, для физической культуры – спортивный зал). Пусть  $\{A_{kr}\}$  – множество кабинетов для проведения урока в классе  $k_r$ .

Задача составления расписания заключается в определении для каждого предмета дня недели и номера урока в этот день  $x_{k_r t_j}^{q_{kr}}$  с учетом выполнения приводимых ниже ограничений и минимизации некоторой целевой функции.

Для каждой группы  $k_r$  должны выполняться все виды аудиторной работы  $W_{kr}$  в течение недели:

$$\sum_{t \in T_{kr}} \sum_{j=1}^J \sum_{q_{kr}=1}^{Q_{kr}} x_{k_r t_j}^{q_{kr}} = W_{kr} \quad \forall r = 1, \dots, R; \quad \forall k_r = 1, \dots, G_r.$$

В любой день  $t$  на каждом уроке  $j$  для каждого класса  $k_r$  может проводиться не более одного занятия:

$$\sum_{q_{kr}=1}^{Q_{kr}} x_{k_r t_j}^{q_{kr}} \leq 1 \quad \forall r = 1, \dots, R; \quad \forall k_r = 1, \dots, G_r; \quad \forall t \in T_{kr}; \quad \forall j = 1, \dots, J.$$

Каждое занятие  $q_{kr}$  по некоторому предмету для всех классов  $k_r$  может проводиться не более двух раз (сдвоенный урок) в любой день  $t$ :

$$\sum_{t \in T_{kr}} \sum_{j=1}^J x_{k_r t_j}^{q_{kr}} \leq 2 \quad \forall r = 1, \dots, R; \quad \forall k_r = 1, \dots, G_r; \quad \forall s_r = 1, \dots, S_r; \quad \forall q_{kr} = 1, \dots, Q_{kr}.$$

Если переменная  $x_{k_r t_j}^{q_{kr}}$  связывает все предметы со временем их проведения, то произведение  $\delta_{k_r q_{kr}}^p \cdot x_{k_r t_j}^{q_{kr}}$  связывает время проведения с именем преподавателя.



В каждый день  $t$  и на каждом уроке  $j$  учитель  $p$  может вести не более одного урока по одному предмету в одном классе:

$$\sum_{r=1}^R \sum_{k_r=1}^{G_r} \sum_{q_{kr}=1}^{Q_{kr}} \delta_{k_r, q_{kr}}^p x_{k_r, t_j}^{q_{kr}} \leq 1 \quad \forall t \in T_{kr}; \forall j=1, \dots, J; \quad \forall p=1, \dots, P.$$

Каждый учитель  $p$  в течение недели должен провести аудиторные занятия:

$$\sum_{t \in T_{kr}} \sum_{j=1}^J \sum_{r=1}^R \sum_{k_r=1}^{G_r} \sum_{q_{kr}=1}^{Q_{kr}} \delta_{k_r, q_{kr}}^p x_{k_r, t_j}^{q_{kr}} = N_p \quad \forall p=1, \dots, P.$$

В каждый день на каждом уроке число занятий не должно превышать имеющийся в школе аудиторный фонд:

$$\sum_{k_r=1}^{G_r} \sum_{q_{kr}=1}^{Q_{kr}} x_{k_r, t_j}^{q_{kr}} \leq A_{k_r} \quad \forall r=1, \dots, R; \quad \forall t \in T_{kr} \quad \forall j=1, \dots, J.$$

Представленные соотношения описывают ограничения, учет которых обязателен при составлении расписания.

Для полноценной учебно-методической работы и подготовки к занятиям учитель должен иметь свободное время. Желательно, чтобы свободное время определялось не столько «окнами» - уроками, свободными от проведения занятий, сколько оптимизацией распределения нагрузки с выделением, при возможности, свободных «методических» дней.

Рассмотрим выражение для величины аудиторной нагрузки в день  $t$  учителя  $p$ :

$$Q_t^p = \sum_{r=1}^R \sum_{k_r=1}^{G_r} \sum_{q_{kr}=1}^{Q_{kr}} \delta_{k_r, q_{kr}}^p x_{k_r, t_j}^{q_{kr}}.$$

Вводятся ограничения вида:  $1 \leq Q_t^p + Mz_t^p \leq M \quad \forall t \in T_{kr}; \quad \forall p=1, \dots, P,$

где  $M$  – произвольное положительное достаточно большое число;  $z_t^p$  - искомая булева переменная.

Если  $Q_t^p = 0$ , то  $z_t^p = 1$ , и если  $Q_t^p > 0$ , то  $z_t^p = 0$ .

С учетом смысла критерия оптимизации в дополнительных ограничениях получаем искомым критерий оптимальности:

$$\sum_{t \in T_{kr}} \sum_{p=1}^P z_t^p \rightarrow \max.$$

Введенная целевая функция не является единственно возможной. Введение других целевых функций не меняет ограничений математической модели и методов решения задачи, но может существенно повлиять на результаты вычислений.

#### Список цитируемой литературы

1. Аль-Габри В.М. Обзор литературных источников по теме «Автоматизация составления расписания занятий и экзаменов в высших учебных заведениях» // Вестник Донского государственного технического университета. – 2017. – №1(88), с. 132-143.
2. Википедия [Электронный ресурс] – Режим доступа: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Теория\\_расписаний](https://ru.wikipedia.org/wiki/Теория_расписаний) – статья «Теория расписаний» (дата обращения 15.02.2019).
3. Бабкина, Т. С. Задача составления расписаний: решение на основе многоагентного подхода // Бизнес-информатика. – 2008. – № 1. – С. 23-28.
4. Антропов А.Ю., Варламова С.А. Проблемы автоматизированного составления расписания занятий средней образовательной школы // Juvenis scientia. – 2017. – № 2, с. 10-13.
5. Открытый урок Первое сентября [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://festival.1september.ru/articles/519295/> – статья «Расписание занятий как организационный документ, определяющий режим работы ОУ» (дата обращения 20.02.2019).



6. Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Теория расписаний. Задачи и алгоритмы, М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2011. 222 с.
7. Бадеников А.В., Балакирев В.С., Истомина А.Л. Формализация задачи составления расписания учебных занятий в вузе // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Иркутский государственный университет путей сообщений. – 2011. – № 1(29), с. 15-21.
8. Астахова И.Ф., Фирас А.М. Составления расписания учебных занятий на основе генетического алгоритма // Воронежский государственный университет. – 2013. – № 2, с. 93-99.

© Д.Н. Куций, И.А. Спиридонова, Д.Ю. Щебет, 2019