



УДК 519.71+06

**СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЛОВИЯ МАКСИМУМА ФУНКЦИИ
ОБОЩЕННОЙ МОЩНОСТИ**

Д.С. Андрашитов¹, А.А. Агапов², andrash45@mail.ru, AAAlexander2794@gmail.com

¹Московский университет им. С.Ю. Витте г. Москва

²Ростовский университет путей сообщения (РГУПС), г. Ростов-на-Дону

Инженерия знаний и проектирование баз знаний — это важнейшие разделы искусственного интеллекта в настоящее время требуют разработки замкнутого множества правил логического вывода, основой которых являются эффективные законы управления. В работе предложен новый алгоритм синтеза интеллектуальных систем управления, режим работы которых определяется максимальной близостью к оптимальному по выбранному критерию закону управления и физической реализуемостью инерционного регулятора. Предлагаемый подход позволяет определить элементы базы знаний на основе разработанной процедуры синтеза в задачах построения множества продукционных правил на множестве функций ограниченной вариации. Работа подготовлена при поддержке гранта РФФИ N 18-08-01494.

Ключевые слова: синтезированные квазиоптимальные интеллектуальные нечеткие управления, голономная управляемая динамическая система.

**SYNTHESIS OF MANAGEMENT UNDER UNCERTAINTY CONDITIONS
WITH THE USE OF THE CONDITION OF THE MAXIMUM GENERAL
POWER FUNCTION**

D.S. Andrashitov¹, A.A. Agapov²

¹Moscow University. S.Y. Witte Moscow

²Rostov State Transport University(RSTU), Rostov-on-Don

Knowledge engineering and knowledge base design are the most important branches of artificial intelligence nowadays require the development of a closed set of inference rules, which are based on effective control laws. The paper proposes a new algorithm for the synthesis of intelligent control systems, the mode of operation of which is determined by the maximum proximity to the optimal control law and physical realizability of the inertia regulator according to the chosen criterion. The proposed approach allows one to determine the elements of the knowledge base on the basis of the developed synthesis procedure in the tasks of constructing a set of production rules on a set of functions of bounded variation. The work was prepared with the support of the RFBR grant N 18-08-01494.

Key words: synthesized quasi-optimal intelligent fuzzy controls, holonomic controlled dynamic system.

Введение. Центральным результатом, расширяющим вариационное исчисление, является принцип оптимальности Л.С. Понтрягина, который может применяться для расчета программного управления как линейными, так и нелинейными системами [1]. Однако построение оптимального управления для нелинейных систем — задача весьма сложная даже для случая кусочно-постоянных управлений, которые приводят к появлению четтеринг-режимов [1, 2]. Причина такой ситуации в том, что на оптимальной траектории максимум гамильтониана достигается более чем в одной точке. Режим учащающихся переключений — препятствие на пути реализации подобных управлений в реальных технических системах. Это породило множество методов синтеза управлений в области скользящего режима [2, 3].



В работе показано, что решение задачи синтеза управлений в пространстве ограниченных кусочно-непрерывных функций с использованием принципа Гамильтона-Остроградского [4] приводит к условию максимума функции обобщенной мощности [5]. Его применение позволяет строить структуры обратных связей на границе области допустимых управлений и внутри ее. Близость синтезированных квазиоптимальных интеллектуальных нечетких управлений к оптимальному решению подтверждается результатами математического моделирования на примере решения задачи быстрого действия.

Постановка задачи. Анализируется голономная управляемая динамическая система, интеграл действия которой имеет вид [4]

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T + A) dt, \quad (1)$$

где $T = \frac{1}{2} \sum_{s,k=1}^n a_{sk}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_s \dot{q}_k$ – кинетическая энергия; $a_{sk}(\mathbf{q}, t)$ – ограниченные коэффициенты инерции; $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T \in R^n$ – вектор обобщенных координат;

$A = \sum_{s=1}^n \int_{q_s(t_0)}^{q_s(t_1)} Q_s dq_s$ – работа обобщенных сил; $\mathbf{Q} = [Q_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \dots, Q_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)]^T$ – не-

прерывный по совокупности переменных вектор обобщенных сил, обусловленных наличием различного рода внешних и внутренних воздействий [9]; $q_s(t_0), q_s(t_1)$ – начальное и конечное состояние; $n = \dim \mathbf{q}$ – число степеней свободы динамической системы; T – знак транспонирования; точкой обозначена производная по времени; $[t_0, t_1] \subset R$ – заданный интервал времени.

В соответствии с принципом Гамильтона – Остроградского, при начале движения системы из начального состояния $t = t_0$, $\mathbf{q}(t_0) = [q_{10}, \dots, q_{n0}]^T$, $\dot{\mathbf{q}}(t_0) = [\dot{q}_{10}, \dots, \dot{q}_{n0}]^T$ в конечное состояние $t = t_1$, $\mathbf{q}(t_1) = [q_{11}, \dots, q_{n1}]^T$, $\dot{\mathbf{q}}(t_1) = [\dot{q}_{11}, \dots, \dot{q}_{n1}]^T$ под действием обобщенных сил на истинной траектории для интеграла действия (1) справедлив принцип стационарности [4]

$$\delta' S = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' A) dt = 0, \quad (2)$$

где $\delta' A = \sum_{s=1}^n Q_s \delta q_s$ – элементарная работа на виртуальных перемещениях, а знак δ' обозначает бесконечно малую величину [4].

Из (2) следуют уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, \quad s = \overline{1, n}, \quad (3)$$



где управляющие воздействия отождествляются с обобщенными силами. Такой случай «играет центральную роль при рассмотрении систем вида (3) и их обобщений» [8].

Пусть задана скалярная непрерывная на ограниченном замкнутом интервале времени $[t_0, t_1] \subset R$ определенно-положительная целевая функция $F(q)$ вместе со своими частными производными. Задача синтеза управления ставится как обратная задача динамики: среди допустимых обобщенных сил $Q \in \bar{G}$ требуется найти такую, для которой целевой функционал

$$I(q) = \int_{t_0}^{t_1} F(q) dt \rightarrow \min_{Q \in \bar{G}} \quad (4)$$

принимает наименьшее возможное значение; здесь $\bar{G}$ – область допустимых обобщенных сил.

Условия максимума функции обобщенной мощности в пространстве ограниченных кусочно-непрерывных функций.

Рассматривается расширенный целевой функционал [5 – 7]

$$I_1(q, Q) = I(q) + \lambda S(Q), \quad (5)$$

где λ – множитель Лагранжа.

Пусть существует вектор обобщенных сил $\tilde{Q} \in \bar{G}$ и соответствующая ему траектория $\tilde{q}$, доставляющие минимум (4). Вариация обобщенной силы приводит к вектору $Q = \tilde{Q} + \delta Q$, которому соответствует движение по околному пути, δQ такая вариация, что $Q \in \bar{G}$. Тогда справедливо неравенство

$$I_1(q, Q) - I_1(\tilde{q}, \tilde{Q}) \geq 0, \quad \forall Q \neq \tilde{Q}. \quad (6)$$

Рассматривается случай, когда точке $\tilde{q}_s(t)$ исходной траектории сопоставляется точка $q_s(t + \Delta t) = \tilde{q}_s(t) + \Delta q_s(t)$ на варьированной траектории; здесь Δt – произвольная неотрицательная бесконечно малая функция времени, а Δq_s – асинхронная (полная) вариация координаты. Рассмотрим асинхронную вариацию расширенного целевого функционала [5 – 7]

$$\Delta I_1 = I_1(q, Q) - I_1(\tilde{q}, \tilde{Q}) = [\lambda(T + A) + F] \Delta t \Big|_{t_0}^{t_1} + \delta I_1, \quad (7)$$

где δI_1 – главная часть приращения расширенного целевого функционала. Поскольку $\Delta t(t_1)$, $\Delta t(t_0)$ не равны нулю и независимы, отыскивается стационарное значение расширенного целевого функционала I_1 , содержащего неопределенный множитель Лагранжа, следует считать равным нулю множитель при $\Delta t(t_1)$, $\Delta t(t_0)$ [4 – 7]. Откуда вытекает условие трансверсальности:

$$[\lambda(T + A) + F] \Big|_{t_0}^{t_1} = 0. \quad (8)$$

Приращение расширенного функционала



$$\Delta I_1 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n [\lambda \delta Q_s + \delta V_s] \delta q_s dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \tilde{V}_s \delta q_s dt. \quad (9)$$

Приращение непрерывной определенно-положительной целевой функции на траектории, доставляющей экстремум целевому функционалу неотрицательно, поэтому $\int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n \tilde{V}_s \delta q_s dt \geq 0$. Тогда при условии

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n [\lambda \delta Q_s + \delta V_s] \delta q_s dt \geq 0 \quad (10)$$

неравенство (9) выполняется. Исследование (10) целесообразно проводить для конкретного множества допустимых обобщенных сил (управлений) [5 – 7].

Пусть вариация обобщенной силы $|\mathbf{Q}| \leq \mathbf{C}$ строится как игольчатая вариация

$$\delta \mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \mathbf{C}, & t \in [\tau, \tau + \varepsilon], \\ \tilde{\mathbf{Q}}(t), & t \notin [\tau, \tau + \varepsilon], \end{cases} \quad (11)$$

где $\mathbf{C}$ – вектор неотрицательных постоянных, $\tau \in (t_0, t_1)$ – момент времени, который задает замкнутый интервал времени $[\tau, \tau + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ – малая величина.

С учетом свойств вариаций (10) неотрицательно, когда

$$\sum_{s=1}^n [\lambda \tilde{Q}_s + \tilde{V}_s] \tilde{q}_s \geq \sum_{s=1}^n [\lambda Q_s + V_s] \dot{q}_s. \quad (12)$$

Тогда для достижения экстремума необходимо, чтобы функция обобщенной мощности

$$\Phi = \sum_{s=1}^n [\lambda Q_s + V_s] \dot{q}_s \quad (13)$$

достигала максимума

$$\max_{|\mathbf{Q}| \leq \mathbf{C}} \Phi = \max_{|\mathbf{Q}| \leq \mathbf{C}} \sum_{s=1}^n [\lambda Q_s + V_s] \dot{q}_s. \quad (14)$$

Пусть $\tilde{\mathbf{Q}}$ принадлежит классу непрерывных вектор-функций, $\tilde{\mathbf{Q}} \in C^n[t_0, t_1]$. Вариация обобщенной силы имеет вид

$$\delta \mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \mathbf{v}(t), & t \in [\tau, \tau + \varepsilon], \\ \tilde{\mathbf{Q}}(t), & t \notin [\tau, \tau + \varepsilon], \end{cases} \quad (15)$$

где $\tau \in (t_0, t_1)$ – произвольная точка непрерывности вектор-функции $\delta \mathbf{Q} \in C^n[t_0, t_1]$, $\mathbf{v}(t)$ – ограниченная вектор-функция.

Тогда подынтегральное выражение (10) – действительная непрерывная функция и в соответствии с [1] имеем

$$\sum_{s=1}^n [\lambda Q_s + V_s(\mathbf{Q})] \dot{q}_s(t) \varepsilon \Delta t + o_1(\varepsilon) \geq \sum_{s=1}^n [\lambda \tilde{Q}_s + V_s(\tilde{\mathbf{Q}})] \dot{q}_s(t) \varepsilon \Delta t + o_2(\varepsilon), \quad (16)$$



где $\varepsilon_1(\varepsilon), \varepsilon_2(\varepsilon)$ – бесконечно малые, более высокого порядка малости, чем ε . С точностью до бесконечно малых условие минимума целевого функционала определяется следующим образом:

$$\sum_{s=1}^n [\lambda \tilde{Q}_s + V_s(\tilde{\mathbf{Q}})] \dot{q}_s(t) \geq \sum_{s=1}^n [\lambda Q_s + V_s(\mathbf{Q})] \dot{q}_s(t). \quad (17)$$

Из (17) следует, что

$$\max_{\tilde{\mathbf{Q}} \in C^n[t_0, t_1]} \Phi = \max_{\mathbf{Q} \in C^n[t_0, t_1]} \sum_{s=1}^n [\lambda Q_s + V_s(\mathbf{Q})] \dot{q}_s. \quad (18)$$

Условия (14) и (18) позволяют получить для произвольного количества степеней свободы n [4 – 7]. структуру решений задачи синтеза

Синтез интеллектуального нечеткого управления на основе объединенного принципа максимума

Для динамической системы

$$\dot{q}_1 = q_2, \dot{q}_2 = u, q_1(0) = 20, q_2(0) = 10, \quad (19)$$

требуется синтезировать управление $|u| \leq U$, переводящее изображающую точку фазового пространства в терминальную точку $(0, 0)$ из условия минимума целевого функционала

$$J_1 = \int_0^{t_1} dt \rightarrow \min. \quad (20)$$

Оптимальное решение задачи (19), (20) получено [1].

В работе [2] показано, что отклонение функционала

$$J_1 = \int_0^{t_1} q_1^2 dt \rightarrow \min \quad (21)$$

на траекториях задачи (19), (20) от оптимального значения отличается не более чем на w , если переход с оптимальной траектории А.Т. Фуллера совершается в

зоне $|q_1| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{w}{g} \right)^{\frac{2}{5}}, |q_2| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{w}{g} \right)^{\frac{1}{5}}$, где g – нормировочная константа, w – число. В

связи с этим для исключения режима с учащающимися переключениями в работе ищется квазиоптимальное решение задачи быстрогодействия в пространстве ограниченных кусочно-непрерывных функций для динамической системы (19) из условия минимума функционала (21).

Использование условий максимума функции обобщенной мощности позволяет получить квазиоптимальное решение задачи синтеза [5 – 8] на границе области допустимых управлений

$$u_1(q_1, q_2) = \lambda^{-1} |U| \operatorname{sign} \left(-\frac{\lambda |q_2| q_2}{2 |q_1|} - q_1 \right) \quad (22)$$

и внутри



$$u_2(q_1, q_2) = \lambda^{-1} \left(-\frac{\lambda |q_2| q_2}{|q_1| + C} - 2q_1 \right), \quad (23)$$

где C – постоянная.

Предлагается состоящий из двух этапов способ управления. На первом этапе с использованием релейного закона управления (22) объект управления (19) приводится в окрестность терминального состояния. На втором этапе используется непрерывное управление (23).

Нечеткая инструкция решения задачи (19), (21) сводится к правилу – вне окрестности используется релейное управление, внутри – непрерывное. Предлагается структура нечеткого управления [7]

$$u = \mu'_1(q_1)u_1(q_1, q_2) + \mu'_2(q_1)u_2(q_1, q_2), \quad (24)$$

где μ'_1, μ'_2 – такие функции принадлежности, что при удалении от терминальной точки μ'_1 уменьшается, а μ'_2 увеличивается.

Для сравнения выбраны варианты функций принадлежности:

$$\mu'_{11}(q_1) = \frac{1}{1 + e^{-(q_1 - k)}}, \quad \mu'_{21}(q_1) = 1 - \frac{1}{1 + e^{-(q_1 - k)}}, \quad (25)$$

и

$$\mu'_{12} = \frac{1}{q_1 + 1} A(q_1, k), \quad \mu'_{22} = \frac{q_1}{q_1 + 1} B(q_1, k), \quad A(q_1, k) = \frac{k(q_1)(1 + q_1)}{q(1 + k(q_1))}, \quad (26)$$
$$B(q_1, k) = \frac{(1 + q_1)}{1 + k(q_1)},$$

расчет параметра $k(q)$ осуществляется по правилу [7,8]:

$$k(q_1) = \begin{cases} k'_2, & q_1 \leq q'_1, \\ \frac{q_1(k'_1 - k'_2) + q'_2 k'_2 - q'_1 k'_1}{q'_2 - q'_1}, & q'_1 < q_1 < q'_2, \\ k'_1, & q_1 \geq q'_2, \end{cases} \quad (27)$$

где q'_1, q'_2 – параметры входных линейных Z-образной S-образной функций принадлежности, k'_1, k'_2 – параметры выходной линейных Z-образной S-образной функций принадлежности. Входным является положение относительно терминальной точки, выходным – значение параметра $k(q_1)$.

На рисунках 2, 3 приведены результаты математического моделирования. Сплошной линией обозначены кривые, соответствующие управлению (24) с функциями принадлежности (25), пунктирной линией кривые, соответствующие оптимальному решению Л.С. Понтрягина, а точками кривые, соответствующие управлению (24) с функциями принадлежности (26). Анализ представленных результатов позволяет сделать вывод о том, что применение нечеткого квазиоптимального управления позволяет избежать режима с учащающимися переключениями. Интеллектуальное нечеткое управление (24) с функциями принадлежно-



сти (26) обеспечивает время достижения терминальной точки, совпадающее в пределах выбранного масштаба рассмотрения с оптимальным. Расчеты показывают, что полученный результат исключает режим учащающихся переключений при снижении быстродействия на 0,4% в сравнении с классическим решением Л.С. Понтрягина, что подтверждает его близость к оптимальному.

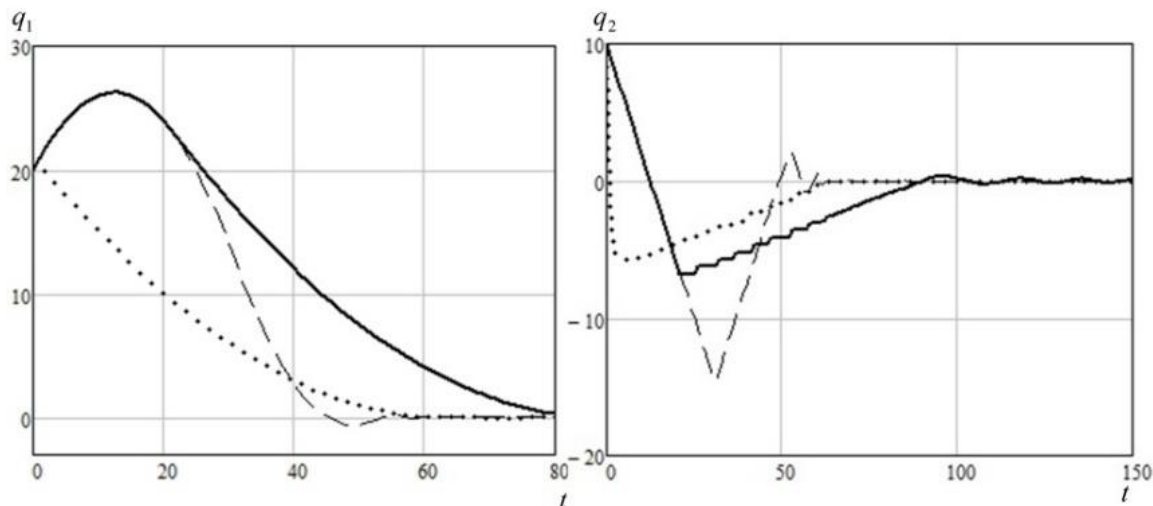


Рис. 1 - Переходный процесс

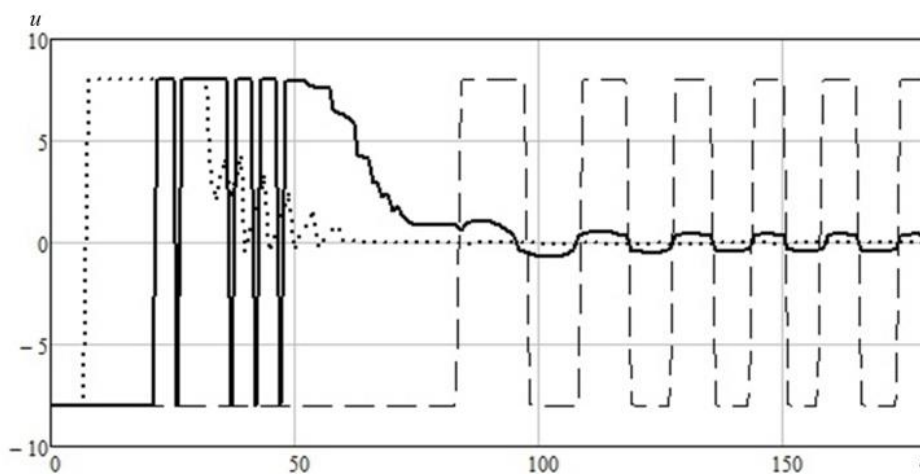


Рис. 2 – Управления

Заключение. Решение задачи синтеза оптимального управления с использованием принципа Гамильтона-Остроградского привело к получению новых условий оптимальности для лагранжевых систем в форме максимума функции обобщенной мощности на множестве ограниченных и непрерывных функций. Математическое моделирование подтвердило близость полученных результатов к оптимальным.

Список цитируемой литературы

1. Костоглотов А.А., Лазаренко С.В. Синтез адаптивных систем сопровождения на основе гипотезы о стационарности гамильтониана гиперповерхности переключения // Радиотехника и электроника. 2017. Т. 62. № 2. С. 121-125.
2. Майкова О.Е. Субоптимальные режимы в задаче Фуллера // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2002.С. 214–217.



3. Костоглотов А.А., Дерюшев В.В., Костоглотов А.И. Идентификация параметров динамических систем на основе объединенного принципа максимума // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2004. № S2. С. 13-18.
4. Костоглотов А.А., Лазаренко С.В., Кузнецов А.А., Дерябкин И.В., Лосев В.А. Структурный синтез дискретных адаптивных следящих систем на основе объединенного принципа максимума // Вестник Донского государственного технического университета. 2017. Т. 17. № 1 (88). С. 105-112.
5. Костоглотов А.А., Кузнецов А.А., Лазаренко С.В., Лосев В.А. Синтез фильтра сопровождения со структурной адаптацией на основе объединенного принципа максимума // Информационно-управляющие системы. 2015. № 4 (77). С. 2-9.
6. Костоглотов А.А., Лазаренко С.В., Пугачев И.В., Чеботарев А.В. Синтез оптимальной по быстродействию системы фазовой автоподстройки частоты на основе объединённого принципа максимума // В сборнике: Актуальные вопросы современной техники и технологии Сборник трудов конференции. 2013. С. 84-87.
7. Костоглотов А.А., Андрашитов Д.С., Дмитренко Г.Н., Лазаренко С.В. Сравнение оптимальных управлений полученных на основе объединённого принципа максимума и принципа максимума Л.С. Понтрягина // В сборнике: Современные проблемы радиоэлектроники материалы Третьей Международной научной конференции. Научный редактор: Безуглов Д.А.. 2010. С. 155-157.
8. Костоглотов А.А., Лазаренко С.В., Кузнецов А.А., Дерябкин И.В., Лосев В.А. Структурный синтез дискретных адаптивных следящих систем на основе объединенного принципа максимума // Вестник Донского государственного технического университета. 2017. Т. 17. № 1 (88). С. 105-112.

© Д.С. Андрашитов, А.А. Агапов 2019