



УДК 519.6

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕАВТОНОМНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

*Буткевич Ю.Р. butkevic@mail.ru, В.В. Афанасьев ivans8585@mail.ru.*

Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет (КНИТУ им.  
А.Н. Туполева-КАИ), г. Казань

В докладе рассматривается неавтономный осциллятор Ван-Дер-Поля при действии на него внешних управляющих периодических воздействий. Определено, при каких условиях происходит хаотическое поведение осциллятора при внешнем управляющим гармоническом воздействии. Произведено математическое моделирование осциллятора Ван-Дер-Поля при вариации параметров управляющих периодических колебаний. Целью данного моделирования является оценка статистических характеристик псевдослучайных сигналов данного осциллятора при вариации параметров нелинейной системы. Исследованы изменения во времени фазовых переменных неавтономного осциллятора Ван-Дер-Поля, построены фазовые портреты системы, оценены характеристики генерируемых псевдослучайных сигналов. Обоснован выбор параметров управляющих периодических воздействий на неавтономный осциллятор Ван-Дер-Поля при генерировании псевдослучайных сигналов.

**Ключевые слова:** осциллятор Ван-Дер-Поля, псевдослучайные сигналы.

## MODELING OF THE NON-AUTONOMOUS OSCILLATOR VAN-DER-POL UNDER PERIODICAL IMPACT

*Butkevich Y.R. V.V. Afanasiev*

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev (KNRTU-KAI), Kazan

The report discusses the non-autonomous van der Paul oscillator when subjected to external control periodic effects. It was determined under what conditions the chaotic behavior of the oscillator occurs with an external controlling harmonic effect. Mathematical modeling of the van der der oscillator with variation of the parameters of the control periodic oscillations was performed. The purpose of this simulation is to estimate the statistical characteristics of the pseudo-random signals of a given oscillator when the parameters of a nonlinear system are varied. The time variations of the phase variables of the non-autonomous van-der-Paul oscillator are investigated, the phase portraits of the system are constructed, the characteristics of the generated pseudo-random signals are estimated. The choice of parameters of control periodic effects on a non-autonomous van der-der oscillator when generating pseudo-random signals is grounded

**Keywords:** Van-Der-Pol oscillator, pseudo-random signals.

Неавтономный осциллятор Ван-Дер-Поля под действием на него внешних воздействий – одно из простых по структуре устройство, которое дает возможность получить сложные колебания. Поэтому моделирование данного осциллятора очень актуально в изучении детерминированного хаоса, потому что хаотические сигналы обладают большой информационной емкостью и позволяют повысить уровень конфиденциальности при передаче сообщений.

Цель работы заключается в моделировании осциллятора Ван-Дер-Поля с внешним гармоническим воздействием, исследовании режима хаотического поведения осциллятора, и оценке влияния параметров гармонического воздействия на статистические характеристики формируемых псевдослучайных сигналов.

Система Ван-дер-Поля с внешним возбуждением описывается уравнением [2].

$$\ddot{X} - \mu(1 - X^2)\dot{X} + X = A\sin(\omega t) \quad , \quad (1)$$

где  $\mu$ - управляющий параметр,  $A$ -амплитуда внешнего воздействия и  $\omega$ - его угловая частота.



Моделирование системы Ван-дер-Поля может быть проведено на основании системы нелинейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = \mu(1 - X^2)Y - X + A\sin(\omega t) \end{cases} \quad (2)$$

У этой системы отсутствует аналитическое решение и необходимо численно интегрировать ее. Запишем матрицу правых частей системы ОДУ (3).

$$F(t, y) = \begin{cases} y_2 \\ \mu(1 - y_1^2) \cdot y_2 - y_1 + A\sin(\omega t) \end{cases} \quad (3)$$

$X = \text{rkfixed}(y, t_0, t_{max}, N, F)$

Параметры системы при моделировании выбраны следующими:

$$\mu = 5, \omega = 2\pi.$$

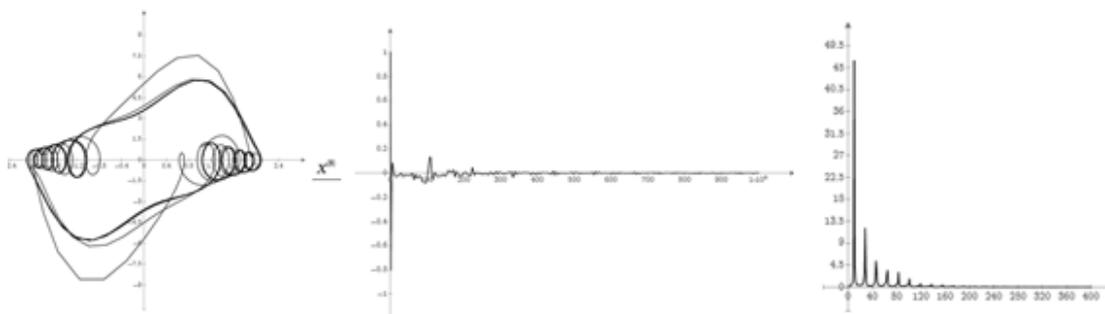
Расчёт производится встроенной функцией Mathcad «rkfixed» при единичных начальных условиях. Временной интервал моделирования выбран постоянным,  $t_0=0$ ,  $t_{max}=100$ , число точек  $N=2000$ . Получена оценка статистических характеристик формируемых псевдослучайных сигналов при вариации параметров гармонического воздействия. Результаты оценки статистических характеристик приведены в таблице (см. табл.1).

Таблица 1.

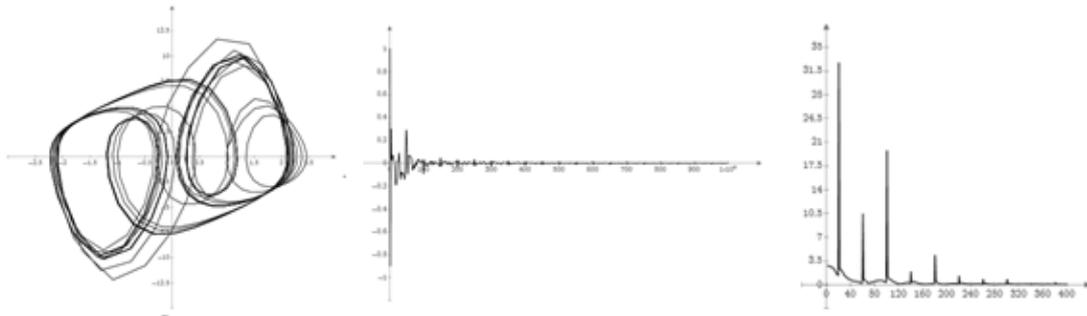
**Статистические характеристики псевдослучайных сигналов**

Амплитуда, A	10	20	30	40	50
M[x]	0.007	0.004	0.033	0.038	0.063
D[x]	2.479	2.381	2.273	2.165	1.779
$\sigma$	13.236	8.737	65.189	76.159	125.294

Полученные характерные фазовые портреты моделируемого осциллятора Ван-Дер-Поля, а также корреляционные функции и спектры формируемых псевдослучайных сигналов при  $\mu = 5, \omega = 2\pi$ , для различных значений амплитуды  $A$  внешнего гармонического воздействия, представлены на рис.1-2



**Рис.1. Фазовый портрет, корреляционная функция и спектр при A=10**



**Рис.4. Фазовый портрет, корреляционная функция и спектр при  $A=50$**

На основании проведенного моделирования установлено, что при  $\mu=5, \omega=2\pi$ ,  $A=10$  происходит изменение режима поведения осциллятора с внешним воздействием, однако спектр сигналов содержит мало гармоник, их мощность значительно меньше мощности на основной частоте. При значении  $A=20$  система Ван-Дер-Поля с внешним гармоническим воздействием переходит в неустойчивое состояние. При выборе амплитуды  $A$  от 30 до 50 происходит изменение поведения осциллятора в регулярный режим работы. Это означает, что увеличение амплитуды более 20 негативно влияет на режим хаотического поведения осциллятора. Автокорреляционная функция формируемых псевдослучайных сигналов при увеличении  $A$  спадает медленнее. В спектре сокращается число гармоник, а сигнал теряет основное свойство хаотического процесса. По статистическим характеристикам можно сделать вывод о том, что увеличение  $A \geq 20$  приводит к снижению эффективности применения управляемого осциллятора для формирования псевдослучайных сигналов.

Таким образом, при построении формирователей псевдослучайных сигналов на основе управляемого осциллятора Ван-дер-Поля рекомендуется выбирать амплитуду внешнего гармонического воздействия при  $\mu=5, \omega=2\pi$  в диапазоне  $15 < A < 30$ .

#### **Список цитируемых источников**

1. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М: Наука. 1990. – 312 с.
2. В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова. «Регулярная и хаотическая динамика». М.-Ижевск: НИЦ 2011– 514 с.