



УДК 621.327

БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ СЖАТИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА БАЗЕ WAVELET - ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ХААРА

Алатар А.И., mih01@mail.ru, Михайлов А.А., mih01@mail.ru

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)
имени М.И. Платова, г. Новочеркасск

В данной статье осуществлен системный анализ быстрых алгоритмов вычисления локального дискретного *wavelet* - преобразования базиса Хаара для одномерного сигнала, приводятся выражения их вычислительной сложности для их сравнения с известным алгоритмом быстрого *wavelet* - преобразования. Определены области определения этих алгоритмов, то есть параметры задачи вычисления *wavelet* - преобразования, для которых эти алгоритмы вычислительно эффективны. На основе анализа сложности алгоритмов, а также с учетом дополнительных возможностей, которые дает рекурсивный алгоритм, делается вывод о его преимуществе по сравнению с альтернативным алгоритмом быстрого *wavelet* - преобразования. Полученные результаты анализа алгоритмов обобщены на 2-х мерный случай.

Ключевые слова: Алгоритм сжатия изображений, вейвлет-преобразования, критерий отношения пикового значения сигнала к шуму, фрактального сжатия, модель изображения, преобразования Хаара для двумерного изображения.

FAST ALGORITHMS FOR COMPRESSION OF DYNAMIC IMAGES ON THE BASIS OF WAVELET - TRANSFORM HAAR

Alatar A. I., Mikhaylov A.A

Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk

In this article, the system analysis of fast algorithms for calculating the local discrete wavelet transform of the Haar basis for a one-dimensional signal is carried out, expressions of their computational complexity are given for their comparison with the known algorithm of fast wavelet transform. The areas of definition of these algorithms, that is, the parameters of the problem of calculating the wavelet transform, for which these algorithms are computationally efficient, are determined. Based on the analysis of the complexity of the algorithms, as well as taking into account the additional features that the recursive algorithm gives, the conclusion is made about its advantage over the alternative and the known algorithm of the fast wavelet transform. A generalization of the considered algorithms to the 2-dimensional case is presented.

Keywords: image compression algorithm, wavelet transform, the criterion of the ratio of the peak value of the signal to noise, fractal compression, image model, Haar transform for two-dimensional image

Введение

В связи с бурным развитием вычислительной техники, Интернета и тесно связанных с ними мультимедийных приложений особую популярность приобрели цифровые изображения, что привлекает в последние годы внимание специалистов для решения широкого спектра прикладных задач, связанных с теорией принятия решений, и обусловило постоянный интерес к улучшению алгоритмов сжатия изображений. Для хранения изображений в цифровой форме требуются значительные объёмы электронной памяти. Сохранение изображений в меньших объёмах памяти приводит к сокращению расходов на хранение информации и уменьшению времени передачи изображений по современным каналам связи, поэтому в наши дни проблема сжатия изображений приобрела особую актуальность.

Целью сжатия изображений является минимизация числа бит, требуемых для представления изображения. Существующие способы сжатия цифровых изображений могут быть поделены на две большие категории: без потерь и с потерями.



Сжатие без потерь означает, что восстановленное после сжатия изображение с точностью до пикселя соответствует оригиналу. Сжатие без потерь не приводит к высоким коэффициентам сжатия (в 2-10 раз, но обычно не более 3-х раз), в то время как алгоритмы сжатия с потерями позволяют достигать компрессии до 50-ти раз без заметного ухудшения качества.

Используемые сегодня форматы сжатия с потерями *JPEG* и *JPEG 2000* были разработаны Объединённой группой экспертов по машинной обработке фотографических изображений (*Joint Photographic Expert Group – JPEG*). Общая идея, лежащая в основе этих методов, заключается в применении к изображению преобразования, концентрирующего большую часть энергии в относительно малом количестве коэффициентов. За счёт более грубого квантования значительная часть коэффициентов преобразования, отвечающих за мелкие детали оригинала, обращается в нуль, что позволяет эффективно закодировать полученную битовую последовательность энтропийным кодером. За высокие степени сжатия приходится расплачиваться ухудшением детализации и размытием контуров. Из-за этого в некоторых отраслях, где предъявляются повышенные или специфические требования к качеству изображений, например в медицине, спутниковой фотографии, издательстве, сжатие с потерями практически не используется.

Из всех современных алгоритмов компрессии с потерями фрактальное сжатие наиболее точно передает контуры исходного изображения и потенциально способно обеспечить наилучшее соотношение степени сжатия и качества. Однако, фрактальная компрессия не лишена недостатков, основной из которых заключается в том, что сам процесс сжатия изображения весьма ресурсоемок, что приводит к значительным временным затратам при его реализации на ЭВМ.

Целью статьи является актуальная научная задача исследования алгоритмов быстрого фрактального сжатия, решение которой позволило бы построить на их основе специальные форматы сжатия для применения в областях, где предъявляются особые требования к качеству изображений.

Алгоритм сжатия изображений на базе вейвлет-преобразования. На сегодняшний день известно много алгоритмов, основанных на вейвлет-преобразовании. Приведем наиболее популярные: рекурсивный (волновой) алгоритм, фрактальный метод сжатия изображений, алгоритм *JPEG-2000*, простой метод вейвлет-сжатия изображений.

В основе простого метода вейвлет-сжатия изображений лежит способность дискретного вейвлет-преобразования к простому и полезному усечению, что приводит к разреженным пространствам. После применения дискретного вейвлет-преобразования к некоторому вектору X конечной размерности усечение будет не что иное, как просто обнуление вейвлет-коэффициентов, лежащих ниже некоторого порога, при этом размерность вектора остается неизменной. Следует отметить, что усечение вектора в вейвлет-пространстве может происходить только по амплитуде, а местоположение коэффициентов роли не играет [1].

Пусть дано некоторое изображение A в градациях серого размерностью $N \times M$, где N – ширина, а M – высота изображения. Применяя вейвлет-преобразование к изображению A и произведя усечение пространства вейвлет-коэффициентов, получаем в терминах линейной алгебры – разреженную матрицу $\bar{A} = WA$, где



W – матрица вейвлет-преобразования, что определяет компактный формат хранения разреженных матриц.

Воспользуемся для хранения разреженной матрицы $\bar{A} = WA$ методом строковой нумерации хранения разреженных матриц. Основное преимущество данного метода заключается в том, что для хранения матрицы A необходим объем памяти, в два раза превышающий объем памяти, необходимый для хранения ненулевых элементов матрицы. В свою очередь, другие методы требуют объема памяти втрое, а то и более раз превосходящий объем памяти, необходимый для хранения ненулевых элементов матрицы, что делает их использование неэффективным в системах сжатия изображений.

Для представления разреженной матрицы A методом строковой нумерации хранения разреженных матриц необходимо заполнить два одномерных массива. Первый массив хранит ненулевые элементы матрицы, второй информацию о размещении ненулевых элементов матрицы, а заполнение массивов осуществляется по определенным правилам.

Одним из недостатков простого вейвлет-сжатия изображений является зависимость размера блока памяти, выделяемого под хранение информации о размещении вейвлет-коэффициентов, от размера сжимаемого изображения. Так для изображений размерностью $N \times M$, причем $(N \times M)^2 < 65535$, необходимо 2 байта памяти для хранения информации о размещении вейвлет-коэффициентов, а для изображений, у которых $(N \times M)^2 > 65535$, необходимо соответственно 3 и более байт памяти для хранения информации о размещении вейвлет-коэффициентов, что делает неэффективным применение простого метода вейвлет-сжатия изображений к изображениям большой размерности. Для устранения этого недостатка воспользуемся методом строковой нумерации, а для достижения максимального эффекта сжатия применим принцип блочного кодирования - разбиение входного потока на блоки и кодирование каждого блока отдельно. Будем применять метод строковой нумерации к блокам вейвлет – коэффициентов по 225 элементов в каждом. Так как блок вейвлет-коэффициентов из 225 элементов соответствует квадратной матрице порядка 15, это позволяет выделять 1 байт памяти под информацию о размещении ненулевых вейвлет-коэффициентов. Из поблочного рассмотрения вейвлет-коэффициентов следует, что необходимо учитывать случай, когда все элементы блока равны нулю.

Сравнение качества восстановленных изображений. Для оценки результатов алгоритма сжатия с потерей качества не только по эффективности сжатия, но и по степени достоверности восстановленного изображения используется критерий отношения пикового значения сигнала к шуму ($PSNR$ – *peak signal-to-noise ratio*) [2]:

$$PSNR = -10 \lg \frac{MSE}{S^2},$$

где среднеквадратическая ошибка (MSE – *mean squared error*) равна сумме квадратов разностей между оригиналом и восстановленным изображением, а S – это максимальное значение пикселя, причем

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N |x(m,n) - \hat{x}(m,n)|^2.$$



Сравнительный анализ современных методов сжатия с потерями – *JPEG*, *JPEG 2000* с фрактальным *FIF* (*Fractal Image Format* – формат фрактального изображения) показал [3], что фрактальное сжатие опережает своих конкурентов по качеству передачи контуров. На основании проведенного анализа делается вывод, что именно фрактальное сжатие является наиболее предпочтительным алгоритмом компрессии изображений с потерями для использования в областях, где предъявляются повышенные требования к качеству передачи контуров.

Процесс фрактального сжатия осуществляется следующим образом:

1. Для отыскания самоподобия изображение разбивается на блоки двух типов. Для простоты будем считать, что блоки имеют квадратную форму. Большие блоки принято называть доменами, а маленькие – рангами. Сторона домена в два раза больше стороны ранговой области.

2. Домены уменьшаются до размеров ранга путём усреднения яркости соседних пикселей.

3. Для каждого ранга осуществляется подбор наиболее похожего на него домена после преобразования, минимизирующего разницу между рангом и доменом, путем перебора всех доменов или какой-либо их части. Преобразование включает в себя изменение контраста и яркости домена. Для домена, уменьшенного до размеров ранга, преобразование имеет вид:

$$T(D) = sD + oI, \quad (1)$$

где $|s| < 1$ – коэффициент контраста, $o \in [-255, 255]$ – коэффициент яркости.

Налагаемые ограничения необходимы для того, чтобы гарантировать сходимость при восстановлении изображения, I – единичная матрица.

Коэффициенты преобразования контраста s и яркости o вычисляются для каждого домена по формулам:

$$s = \frac{N^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_{i,j} R_{i,j} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_{i,j} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_{i,j}}{N^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_{i,j}^2 - \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_{i,j} \right)^2}, \quad \text{если } N^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_{i,j}^2 - \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_{i,j} \right)^2 = 0, \quad \text{то } s=0 \quad (2)$$

$$o = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_{i,j} - s \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_{i,j}}{N^2}, \quad (3)$$

где D и R – матрицы, представляющие собой соответственно домен, уменьшенный до размера ранга, и ранг, N – размер стороны рангового блока.

Необходимость проведения большого количества сравнений ранг-домен приводит к значительным временным затратам на сжатие. Большое время компрессии – основной недостаток фрактального алгоритма.

4. На основе рассчитанных коэффициентов преобразования (2, 3) оценивается соответствие домена и ранга по среднеквадратической метрике:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_{i,j}^2 + s \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_{i,j}^2 - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_{i,j} R_{i,j} + 2o \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_{i,j} \right) + o \left(oN^2 - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_{i,j} \right)}{N^2}.$$

В результате, для каждого ранга определяются координаты наиболее похожего на него домена вместе с коэффициентами преобразования доменного блока в ранговый, минимизирующими разницу между ними. Сжатие достигается за счет



того, что объем сохраняемых коэффициентов значительно меньше объема исходного изображения.

Восстановление изображения происходит итеративно. Берется произвольное изображение, назовем его стартовым, размер которого равен размеру оригинала. Это изображение разбивается на домены, и их размер уменьшается до размеров ранга подобно тому, как это делалось на этапе сжатия. Затем домены в соответствии с сохраненными координатами и коэффициентами, подобранными при сжатии, преобразуются в ранги по формуле:

$$R = sD + oI$$

и из них формируется промежуточное изображение восстановления. Затем процедура повторяется для полученного промежуточного изображения. На последующих итерациях в качестве стартового изображения используется образ, полученный на предыдущей итерации. На практике достаточно 5 – 10 итераций. Процесс восстановления фрактального изображения в отличие от сжатия происходит очень быстро.

Анализ научной литературы показал, что среди всех вариантов разбиения изображения на ранги наибольшую популярность приобрел алгоритм квадродерева (*Quadtree*) из-за своей простоты и высокой эффективности. При разбиении квадродерева используется широко известный в обработке изображений способ, основанный на последовательном разбиении квадратных блоков, позволяя тем самым представить всю схему разбиения в виде древовидной структуры, в которой каждый узел, если он не является последним в ветви, может иметь четырех потомков. Таким образом, области изображения с плавными переходами яркости покрываются рангами большего размера, а на контрастных участках размер ранговых областей уменьшается, что позволяет гибко адаптировать схему разбиения под любое фото реалистичное изображение.

Ни один метод разбиения на ранговые блоки неправильной формы, участвовавших в сравнении, не смог обеспечить качественные показатели, аналогичные алгоритму квадродерева. Именно по этим причинам схема разбиения на ранги квадродерева была выбрана в качестве отправной точки для дальнейшего исследования. Более сложные схемы разбиений приводят к дополнительным вычислительным затратам, увеличивающим время сжатия, а качественные показатели не окупают этих затрат, зачастую уступая реализациям на основе квадродерева.

Для существенного сокращения времени обработки изображения исследовательский интерес представляет сам алгоритм сравнения рангов и доменов, поскольку эта операция повторяется многократно и доминирует в вычислительной сложности фрактального сжатия.

Даже незначительное ее упрощение позволит получить ощутимый рывок в скорости выполнения всего алгоритма. Другой перспективной областью исследования является сокращение числа доменов, участвующих в сравнении с рангом, путем их классификации по числовым характеристикам, которые можно считать инвариантными относительно преобразований, применяемых к блокам. В этом случае ранг сравнивается только с теми доменами, числовые характеристики которых близки к его собственным, то есть можно сказать, что априори ранг и домен похожи друг на друга. В результате количество сравнений уменьшается, а скорость сжатия увеличивается.

Формирование одномерной модели изображения. Для формирования модели изображения представим структуру множества S состояний изображения объекта



системой $\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ ($0=x_0 < x_1 < \dots < x_K$) мощности $l=|X|$ с общим количеством пикселей по горизонтали K и ($0=y_0 < y_1 < \dots < y_N$) мощности $h=|Y|$ с общим количеством пикселей по вертикали N . При этом воспользуемся ступенчатой функцией (рис. 1)

$$\eta(x_1 < x < x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [x_1, x_2], \\ 0, & \text{если } x \text{ вне } [x_1, x_2], \end{cases} \quad (4)$$

лапласовский образ которой с параметром преобразования Лапласа p равен

$$\eta(x_1 < x < x_2) \rightarrow \frac{1}{p} \exp[-px_1] \{1 - \exp[-p(x_2 - x_1)]\}.$$

Фурье – преобразование данной ступенчатой функции является материнской функцией для одной из первых и наиболее простых *wavelet*-ов преобразований Хаара (ПХ) [4]. Родительская (материнская) *wavelet* – функция данной ступенчатой функции

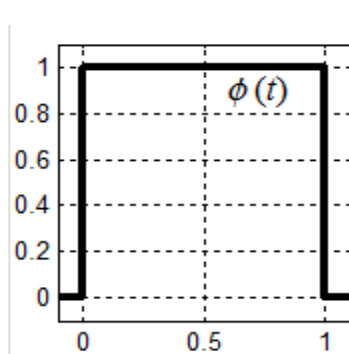


Рис. 1. Скейлинг-функция Хаара/ Fig. 1. Haar scaling function

с единичным значением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$ определяет грубое приближение (аппроксимацию) сигнала.

Wavelet-ы Хаара характеризуются ортонормированностью и замкнутостью, но не являются гладкими. Для одномерной функции Хаара (4) эти условия выполняются на интервале $0 \leq x \leq X$, а индексы двойной нумерации функции при $m \leq 2$ связаны соотношением $m = 2^{k-1} + i$, где $i = 1, \dots, 2^k$. Система функций Хаара (4) образуется путем сжатия и сдвига функций, получаемых из функции $HAR_{11}(x)$. При этом степень сжатия определяется индексом k , а величина сдвига –

индексом i . Аналогичные функции с индексами n и j вводятся и по координате y в интервале $0 \leq y \leq Y$.

Ступенчатая функция (4) на k -й стадии для n -го этапа имеет Лапласиант

$$\eta(x_k^{(n)} < x < x_{k+1}^{(n)}) \rightarrow \frac{1}{p} \exp[-px_k^{(n)}] \{1 - \exp[-p\Delta_k]\} = \frac{1}{p} [\exp(-px_k^{(n)}) - \exp(-px_{k+1}^{(n)})],$$

где $\Delta_k = x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}$ – длина пикселя (длина 100 пикселей равна 2,636 см.).

Если повторить этот процесс для $(n+1)$ -го этапа (по координате y), то

$$\begin{aligned} & \eta(x_k^{(n)} < x < x_k^{(n)} + \Delta^{(n)}) + \eta(x_k^{(n)} + \Delta^{(n)} < x < x_k^{(n)} + \Delta^{(n)} + \Delta^{(n+1)}) = \\ & = \eta(x_k^{(n)} < x < x_k^{(n)} + \Delta^{(n)}) + \eta(x_k^{(n)} + \Delta^{(n)} - \Delta^{(n+1)} < x < x_k^{(n)} + \Delta^{(n)}) \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{p} \exp(-px_k^{(n)}) [1 - \exp(-p\Delta^{(n)})] + \frac{1}{p} \exp(-px_k^{(n)}) \exp[-p(\Delta^{(n)} - \Delta^{(n+1)})] \times \\ & \times [1 - \exp(-p\Delta^{(n)})] = \frac{1 - \exp(-p\Delta^{(n)})}{p} [1 + e^{-p(\Delta^{(n)} - \Delta^{(n+1)})}] \exp(-px_k^{(n)}), \end{aligned}$$

где $\Delta^{(n)} = x_k^{(n+1)} - x_k^{(n)}$ – высота пикселя.

Для сформированного одномерного элемента структуры множества S состояний изображения для профиля алгоритмов сквозной технологии получения и обработки изображения при эредитарной модели определим технологические операции перехода между состояниями, суммирования *wavelet* – преобразований Хаара, а также формирования элемента структуры множества для двумерного изображения.



Определение преобразования Хаара для двумерного изображения. При формировании профиля алгоритмов сквозной технологии решения задачи получения и цифровой обработки изображений путем восстановления двумерных сигналов пространственно-временных зашумленного, дефокусированного или смазанного искаженных динамических изображений и реконструкции изображения используют дискретные ортогональные преобразования двумерных сигналов, которые образуют двумерные ортогональные системы функций и строятся на основе соответствующих одномерных систем [5, 6]. Локальная определенность базисных функций полезна при обработке сигналов, локально определенных в области анализа (изображений объектов конечных размеров) [7]. Локальная определенность и связанная с ней нормировка функций Хаара определяют двумерное ПХ в области $0 \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq Y$ произведением одномерных функций Хаара (4):

$$\text{HAR}_{mn}(x, y) = \text{HAR}_m(x) \text{HAR}_n(y). \quad (5)$$

Образованная из исходных ортонормированных и замкнутых одномерных функций система двумерных функций (5) является ортонормированной и замкнутой [8] и ее можно использовать в обобщенном спектральном анализе. Для любой квадратично-интегрируемой в области $0 \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq Y$ функции $f(x, y)$ коэффициенты Фурье-Хаара

$$C_{mn} = \int_0^x \int_0^y f(x, y) \text{HAR}_{mn}(x, y) dx dy \quad (6)$$

образуют равномерно сходящийся двумерный ряд

$$\lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn} \text{HAR}_{mn}(x, y) = f(x, y), \quad (7)$$

где коэффициенты C_{mn} при функциях $\text{HAR}_{mn}(x, y)$ определяются выражением [6]

$$\mathbf{C}(M, N) = \text{HAR}(M) \cdot \mathbf{F}(M, N) \cdot \text{HAR}^T(N), \quad (8)$$

где $\mathbf{C}(M, N)$ – матрица коэффициентов Хаара C_{mn} размерностью $M \times N$; $\mathbf{F}(M, N)$ – матрица отсчетов исходной функции $f(x, y)$ размерностью $M \times N$; $\text{HAR}(M)$ и $\text{HAR}(N)$ – матрицы преобразования Хаара размерностью $M \times M$ и $N \times N$ соответственно. Число элементов разбиения выбирается равным $M=2^a$, $N=2^b$, где a и b – целые числа.

Матрица HAR_{2^n} при вычислении двумерного ПХ является несимметричной, и в выражении (8) обязательно транспонирование второй матрицы преобразования, элементы матрицы HAR_{2^n} принимают значения 0 и $\pm 2^{-\frac{r}{2}}$, где r – целое число, что создает определенные неудобства при реализации быстрых алгоритмов вычисления, а при получении обобщенных выражений для матрицы ПХ приходится использовать нетрадиционные математические операции. Обобщенное выражение для матрицы ПХ HAR_{2^n} ($M=2^a=2^n$) размера $2^n \times 2^n$ в рекурсивной форме имеет вид [9 – 11]:

$$\text{HAR}_{2^n} = [\text{HAR}_{2^{n-1}} \otimes G_2] H_r^{(n)} (2^{(n-1)/2} [I_2^{[n-1]} \otimes G_2^3]) = [\text{HAR}_{2^{n-1}} \otimes [1 \ 1]] H_r^{(n)} \left(2^{(n-1)/2} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{[n-1]} \otimes [1 \ -1] \right] \right), \quad (9)$$

и нерекурсивной форме [9 – 11]:



$$\text{HAR}_{2^n} = \underset{r}{H} \left(2^{(n-1)/2} I_2^{[n-1]} \otimes G_2^3 \right)^{\delta(r)} \otimes (G_2)^{[n-r]} = \underset{r}{H} \left(2^{(n-1)/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{[n-1]} \otimes [1 \ -1] \right)^{\delta(r)} \otimes [1 \ 1]^{[n-r]}, \quad (10)$$

где $G_n^{(i)}$ – матрица–строка из n элементов с i элементами, равным единице, и остальными элементами, равными нулю, $i=0, 1, \dots, n-1$, $\underset{r}{H}$ – знак вертикальной суммы² $(n+1)$ матриц, нумеруемых по r сверху вниз; $\otimes$ – знак кронекеровского произведения двух матриц³; $[G]^{[r]}$ – матрица G в r -й кронекеровской степени

$$\delta(r) = \begin{cases} 0, & r = 0 \\ 1, & r \neq 0 \end{cases}.$$

Первые две из вертикально суммируемых матриц в (9, 10), соответствующие $r=0$ и $r=1$, имеют размерности $1 \times M$, а последующие $(n-1)$ матрицы, соответствующие $r=2, \dots, n$, имеют размерность $2^{r-1} \times M$. В результате получается квадратная матрица размерностью $M \times M$. Выполнение условия ортонормированности для локально определенных функций Хаара приводит к неодинаковым их уровням на интервалах ненулевых значений у различных групп из 2^{r-1} функций, $r=1, \dots, n$, и к различным значениям элементов матрицы ПХ $\text{HAR}(M)$.

Выбор числа базисных функций в разложении (7) осуществляется следующим образом. Если функция $f(x, y)$ дискретная и число точек по координатам x и y соответственно $M=2^a$ и $N=2^b$, то в силу полноты базисной системы функций Хаара [7] отсчеты функции $f(x, y)$ могут быть однозначно представлены суммой MN двумерных функций $\text{HAR}_{mn}(x, y)$. Если же функция $f(x, y)$ непрерывная, то число элементов разложения определяется, исходя из требуемой точности ее аппроксимации конечной суммой Фурье-Хаара. При этом элементы матрицы $\mathbf{F}(M, N)$ в выражении (8) соответствуют средним значениям функции $f(x, y)$ на интервалах дискретизации размером $\left(\frac{X}{M}\right) \times \left(\frac{Y}{N}\right)$ по координатам x и y соответственно.

Среднеквадратическая ошибка аппроксимации стационарной случайной функции $f(x, y)$ конечным числом MN двумерных функций Хаара равна:

$$\sigma^2(M, N) = \sigma_f^2 - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sigma_{mn}^2,$$

² Вертикальной суммой двух матриц $\mathbf{M}_{r,s}^{(1)}$ и $\mathbf{M}_{p,s}^{(2)}$ называется матрица первые r строк которой являются строками матрицы $\mathbf{M}_{r,s}^{(1)}$, а последние p строк – строками матрицы $\mathbf{M}_{p,s}^{(2)}$:

$$\mathbf{M}_{r+p,s} = \mathbf{M}_{r,s}^{(1)} \underset{r}{H} \mathbf{M}_{p,s}^{(2)}$$

³ Если A – матрица размера $m \times n$, B – матрица размера $p \times q$, тогда произведение Кронекера есть блочная матрица размера $mp \times nq$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$



где σ_f^2 – дисперсия случайной функции $f(x, y)$; σ_{mn}^2 – дисперсии случайных коэффициентов разложения C_{mn} (6); $\neg$ – логический символ исключения. Причем коэффициент C_{11} , исходя из определения функции Хаара $HAR_{11}(x, y)$, равен среднему значению функции $f(x, y)$ в области анализа и исключается из рассмотрения.

Для всех коэффициентов C_{mn} , образующих группы, соответствующие фиксированным значениям пар индексов k и l при двойной нумерации функций Хаара в выражении (6), дисперсии σ_{mn}^2 равны между собой. Это следует из выражения

$$\sigma_{mn}^2 = \int_0^X \int_0^Y R(\Delta x, \Delta y) HAR_{mn}(x, y) \times HAR_{mn}(x + \Delta x, y + \Delta y) dx dy d\Delta x d\Delta y, \quad (11)$$

где $R(\Delta x, \Delta y)$ – автокорреляционная функция стационарной случайной функции $f(x, y)$. Функции Хаара, соответствующие одинаковым значениям индексов k и l в двойной нумерации, отличаются друг от друга только сдвигом по соответствующей координате. Произведение $HAR_{mn}(x, y) \cdot HAR_{mn}(x + \Delta x, y + \Delta y)$, входящее в выражение (11), зависит только от величины сдвигов Δx и Δy , поэтому дисперсии σ_{mn}^2 , соответствующие фиксированным значениям пар индексов k и l , равны между собой.

ВЫВОДЫ

Анализ задачи формирования алгоритмов сжатия динамических изображений на базе *wavelet* - преобразований Хаара, проведенный в статье, позволяет сделать следующие выводы:

1. Из всех современных алгоритмов компрессии с потерями фрактальное сжатие наиболее точно передает контуры исходного изображения и потенциально способно обеспечить наилучшее соотношение степени сжатия и качества, однако процесс фрактального сжатия изображения весьма ресурсоемок, что приводит к значительным временным затратам при его реализации на ЭВМ.

2. В основе простого метода вейвлет-сжатия изображений лежит способность дискретного вейвлет-преобразования к простому и полезному усечению, что приводит к разреженным пространствам.

3. Двумерное ПХ в области $0 \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq Y$ определяется произведением исходных ортонормированных и замкнутых одномерных функций Хаара и является ортонормированной и замкнутой, т.е. может быть использована в обобщенном спектральном анализе.

4. ПХ используется для локализации частотно-пространственных особенностей исходного сигнала алгоритмами сжатия входных сигналов, компрессии изображений и подавления шумов и сжатия. Это позволяет восстанавливать сигналы с высокой степенью подобия к исходному сигналу, однако при этом уменьшается влияние слабых шумовых сигналов и снижается объем информации, необходимый для представления сигнала. На основе *wavelet* – преобразования разработан стандарт сжатия изображений *JPEG2000*, степень сжатия которого задается и варьируется в пределах 5–100.

Список цитируемой литературы

1. William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery. Numerical recipes in C. The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 1992. P. 71–90, 591–606.



2. Садыхов Р.Х., Козловский А.Н. Алгоритм сжатия изображений на базе вейвлет-преобразования//Доклады БГУИР 2007 № 3 (19). –С. 107 – 112
3. Илюшин С.В., Свет С.Д. Фрактальное сжатие телемедицинских изображений//Электросвязь. – 2009. – №4. – С.36–40.
4. Казарян М. Л. Исследование вейвлет-преобразований Хаара на корректность в контексте задачи космического мониторинга земли// Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2013. № 6. –С. 14 – 17.
5. Ахмед Н. Д., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь. 1980. –248 с.
6. Обработка изображений и цифровая фильтрация /Под ред. Т. Хуанга. М.: Мир. 1979. –320 с.
7. Соболев И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука. 1969. – 288 с.
8. Петров В. П. Прикладная спектральная теория оценивания. М.: Наука. 1982. –432 с.
9. Ахмед Н. Д., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь. 1980. – 248 с.
10. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. М.: Сов. Радио. 1979. –312 с.
11. Ярославский Л. П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии. Введение в цифровую оптику. М.: Радио и связь. 1987. –296 с.