



УДК 532.5:519.6

## АЛГОРИТМ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

*Абрамов В.В., e-mail: abram5189@yandex.ru*

Южный Федеральный университет, г. Ростов на Дону

В статье рассмотрена классическая задача о течении вязкой жидкости в бесконечном канале постоянной ширины. Задача решена в двумерном случае, как при ламинарном, так и при турбулентном режимах потока, используя в качестве математической модели уравнения Навье – Стокса в терминах вихрь – функция тока. Представленный алгоритм является полуаналитическим итерационным методом, основан на построении специальной функции Грина в виде разложения в ряд Фурье по поперечной координате для канала.

**Ключевые слова:** уравнение Навье – Стокса, несжимаемая жидкость, функция тока, вихрь, функция Грина, турбулентный поток.

## SEMI-ANALYTIC ALGORITHM OF CALCULATION A TURBULENT FLOW OF FLUID IN THE CHANNEL OF CONSTANT WIDTH

*Abramov V.V.*

Southern Federal University, Rostov on Don

The paper deals with the classical problem of the flow of a viscous fluid in an infinite channel of constant width. The problem is solved in the two-dimensional case, both in the laminar and turbulent flow regimes, using as a mathematical model the Navier – Stokes equations in terms of the vorticity-stream functions. The presented algorithm is a semi-analytical iterative method, based on the construction of a special Green's function in the form of expansion in a Fourier series over the transverse coordinate for the channel.

**Keywords:** Navier – Stokes equation, incompressible fluid, stream function, vorticity, Green's function, turbulent flow.

### Введение

Последние три десятилетия отмечается бурное развитие вычислительной техники. Из года в год стремительно возрастают объемы памяти и мощности процессоров вычислительных машин. Этот факт не мог не сказаться на методах расчета течений жидкости. В наши дни можно отметить два основных класса подходов к расчету движения вязкой несжимаемой жидкости.

Первый класс методов расчета движения вязкой жидкости называют прямым численным моделированием (DNS). Этот метод подробно рассматривается в работах [1-4]. Его суть состоит в решении уравнений Навье-Стокса в дискретизированной области течения жидкости, путем введения в ней расчетной сетки. На этой расчетной сетке вводятся сеточные функции, значения которых и определяются из решения дискретизированных уравнений Навье-Стокса. На данный момент данные методы получили мощнейшее развитие. И это не удивительно, так как результаты, получаемые с помощью данного класса методов, очень хорошо согласуются с результатами физических экспериментов. Более того, метод DNS помогает определять новые важные физические принципы генерации турбулентности посредством нефизического эксперимента. Таким образом, метод DNS в последнее время заменил физические эксперименты экспериментами численными. У метода DNS имеется несколько трудностей при его реализации. Основной трудностью при разработке DNS методов становится необходимость построения расчетной сетки исследуемой области, на которой впоследствии будут определены



все необходимые сеточные функции. Дело в том, что корректный расчет физических величин турбулентного течения связан с непрерывными масштабами его движения. Так, например, для расчета пристеночных течений необходимо учитывать числа порядка  $Re^{21/8}$  и учитывать числа порядка  $Re^{7/2}$  при расчете динамически значимых пульсаций скорости при больших числах Рейнольдса [2]. Это обстоятельство приводит к тому, что при использовании DNS турбулентного потока ограничиваются случаем малого числа Рейнольдса и рассмотрением простейшей геометрии – пластин, каналов, труб круглого, эллиптического и прямоугольного сечения [3-7].

Второй класс методов позволяет рассматривать сложные, реальные геометрии при расчете течений вязкой жидкости. Эти методы объединяются общим названием – метод погруженной границы (IBM). Основной идеей метода погруженной границы являются упрощения, накладываемые на вычислительную сетку на границе жидкости и рассматриваемого тела. Для этого тело, интересующее нас, удаляется из рассматриваемой области, а его действие на поток учитывается путем введения дополнительных силовых членов в главные уравнения, для моделирования потока. Таким образом, метод погруженной границы позволяет решать дифференциальные уравнения, описывающие течение вязкой жидкости, в случае сложных геометрий рассматриваемых областей на простых сетках. Более подробно класс этих методов описан в работах [8-13]. Надо заметить, что и у данных методов есть свои недостатки. Ключевым недостатком этих методов, на наш взгляд, является невозможность детального исследования течения вблизи погруженной границы – наиболее интересной области. Этот недостаток возникает из-за моделирования погруженной границы с помощью дельта функции, примером могут служить работы [14, 15], вследствие чего теряется гладкость решения на погруженной границе и вблизи нее получаются нефизические осцилляции решения, передающиеся через эту границу. Для преодоления этой неприятности, силовое воздействие, оказываемое погруженной границей на поток, «распределяют на соседние» слои сетки (как правило, ближайших четыре слоя). Собственно, данный подход и делает фактически невозможным точное изучение решений вблизи погруженной границы.

В данной работе мы рассмотрим метод, рассчитывающий течение вязкой несжимаемой жидкости в канале постоянной ширины при заданном расходе жидкости. Представленный метод является полуаналитическим, то есть, в отличие от описанных выше методов, этот метод не состоит в выборе расчетной сетки и расчетной численной схемы для главных уравнений при дискретизации области или моделировании дополнительных членов главных уравнений, учитывающих погруженные границы. Его суть заключается в применении аналитического способа решения этой задачи с заданной геометрией. Привлечение аппарата численных методов в этом случае является не элементом численного моделирования, а лишь необходимостью для нахождения решения интегральных уравнений.

### **Постановка задачи**

Рассмотрим классическую задачу о движении однородного установившегося турбулентного потока вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном канале в двумерном случае. Будем предполагать, что ширина канала равна  $b$ , а стенки



канала абсолютно гладкие, не оказывающие влияния на процесс перехода режима течения жидкости из ламинарного в турбулентный. Также условимся, что стенки абсолютно твердые, не проницаемые для жидкости. Будем считать, что на стенках канала выполняются условия прилипания жидкости.

Для определенности рассмотрения нашей задачи, введем систему отсчета следующим образом: ось  $Ox$  направим вдоль канала, то есть  $x \in (-\infty; +\infty)$ , а ось  $Oy$  направим поперек канала, то есть  $y \in [0; b]$  (см. Рис. 1). Обозначим, вектор скорости потока через  $\vec{v} = (v_x; v_y) = (u; v)$ , где  $u = u(x, y, t)$  продольная компонента скорости, а  $v = v(x, y, t)$  поперечная компонента скорости.

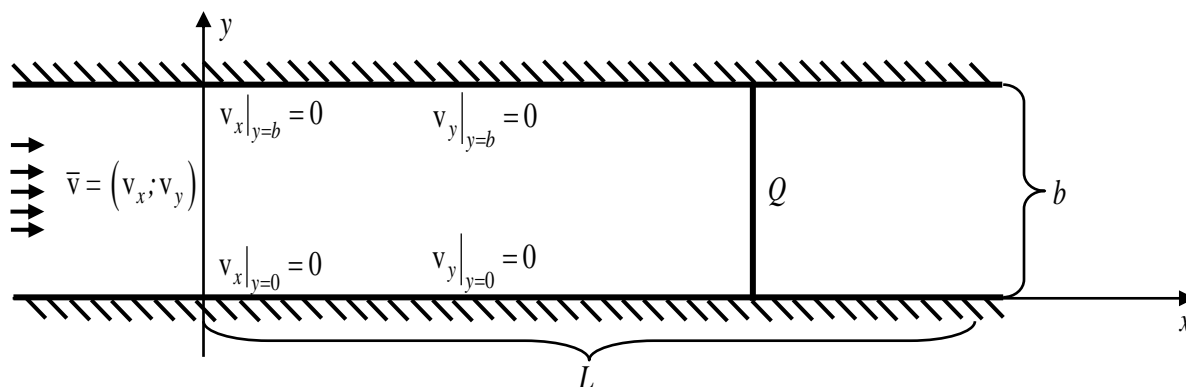


Рис. 1 – Схематическое изображение расчетной области

В этом случае моделирование течения жидкости в канале произведем с использованием уравнения Навье-Стокса, записанного в терминах функция тока - вихрь [15]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \nu \Delta \zeta, \text{ где } u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \Delta \psi \quad (1)$$

Здесь  $\psi = \psi(x, y, t)$  - функция тока для скорости, а  $\zeta = \zeta(x, y, t)$  - вихрь скорости.

Нам известен расход жидкости через нормальное сечение канала, который равен  $Q$ . Так как поток установившийся, то расход жидкости  $Q$  в нормальном сечении канала можно считать постоянным. Известный факт, что расход жидкости через нормальное сечение канала связан с функцией тока скорости соотношением:

$$Q = \int_0^b u(x, y, t) dy = \psi(x, b, t) - \psi(x, 0, t) \quad (2)$$

Из условия (2) и условий прилипания жидкости на стенках канала, для уравнения Навье-Стокса (1) можно записать следующие граничные условия:

$$\psi|_{y=0} = 0, \psi|_{y=b} = Q, \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (3)$$

Обзор методов решения этой задачи приведен в работах [4,16-22]. Эффективность этих методов по времени резко снижается при переходе течения от ламинарного к турбулентному режиму. Причины этого описаны в работах [1-4] –



увеличение числа узлов вычислительной сетки, для правильного учета мелкомасштабных вихрей.

Предлагаемый в данной работе метод расчета в меньшей степени зависит от выбора расчетной сетки. Строить этот метод будем исходя из следующих предположений. Первое – экспериментально подтверждается, что выбор начального поля скоростей не меняет качественного характера турбулентного течения. Поэтому можно считать, что в начальный момент времени имеется некоторое начальное условие для вихря скорости. В этом случае (1) при помощи конечно разностной схемы для производной вихря  $\frac{\partial \zeta_n}{\partial t} = \frac{\zeta_n - \zeta_{n+1}}{\theta}$  по времени, где  $\theta$  – шаг по времени, уравнения (1) приводятся к следующим эллиптическим задачам:

$$\zeta_n - \varepsilon \Delta \zeta_n = g_{n-1}, \text{ где } g = \zeta_{n-1} + \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{n-1}, \Delta \psi_n = \zeta_n, \varepsilon = \nu \theta \quad (4)$$

Таким образом, решение уравнения (1) свелось к решению двух эллиптических задач: уравнения Гельмгольца для завихренности и уравнения Пуассона для функции тока. К этим уравнениям необходимо добавить граничные условия (3).

Для решения эллиптических задач (4) необходимо поставить граничные условия по переменной  $x$ . Здесь мы следуем подходу, описанному в [15] и принимаем второе предположение – однородный турбулентный поток в бесконечном канале имеет одни и те же свойства вдоль потока, если характеристики этих свойств потока регистрировать на различных участках канала достаточно большой длины  $L$ . Это предположение делает возможным записать следующие периодические граничные условия на функции:

$$\psi|_{x=0} = \psi|_{x=L}, \zeta|_{x=0} = \zeta|_{x=L}, \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{x=L}, \frac{\partial \zeta}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}|_{x=L} \quad (5)$$

С учетом второго предположения задача решается не в бесконечном канале постоянной ширины, а в прямоугольной области длиной  $L$  и шириной  $b$ .

### Нахождение функции тока и вихря

Рассмотрим вопрос о нахождении функции тока  $\psi$  для скорости и вихря скорости  $\zeta$ . Для их отыскания необходимо решить два эллиптических уравнения: уравнение Гельмгольца для нахождения вихря скорости  $\zeta$  и уравнение Пуассона для функции тока  $\psi$  для скорости. Первое, что необходимо отметить – несмотря на то, что формально это два разных уравнения, их решения связаны между собой.

Классический подход к решению данных эллиптических уравнений – дискретизация этих уравнений и сведения их к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Так, например, для решения уравнения Гельмгольца популярны методы  $LU$  разложения матрицы  $A$  исходной СЛАУ, в частности метод  $LDL^T$ , где  $L$  – нижнетреугольная матрица,  $D$  – диагональная матрица,  $L^T$  – верхнетреугольная матрица. Основным достоинством этого метода является необходимость единожды получить данное разложение и далее получить возможность решать эту СЛАУ с различными правыми частями. Но это достоинство одновременно является и недостатком этого метода. Дело в том, что хранение этого  $LDL^T$  разложение матрицы  $A$  исходной СЛАУ весьма затратно, с точки зрения занима-



емой памяти. Дело в том, что матрица  $L$  заполнена большим количеством ненулевых элементов, нежели матрица  $A$ . Современным подходом для преодоления этой трудности, является метод, состоящий в перестановке друг с другом строк и столбцов матрицы  $A$ . Примером такого метода является метод вложенных сечений ( $ND$ ). Метод  $ND$  относится к многоуровневым прямым методам ( $MDS$ ), которые являются эффективными при решении двумерных задач. Для повышения производительности многоуровневых прямых методов применяется метод аппроксимации матрицами малого порядка, который описан в работе [23].

Что же касается уравнения Пуассона, то его решение с позиции вычислений является довольно тяжелым. Существует множество методов решения этого уравнения, с отличными друг от друга скоростями получения результата. Наиболее популярным сейчас, методом решения уравнения Пуассона является сведения его к трехдиагональной СЛАУ и ее решение с использованием алгоритмов распараллеливания процессов, с применением графического ускорителя видео карт Nvidia CUDA. Более подробный обзор данных методов представлен в работе [24]. Очевидной трудностью данного подхода является сложность написания самого кода программы и необходимость применения определенного вида вычислительного оборудования.

Использование метода, предлагаемого в этой статье, подразумевает не численное, а аналитическое решение, как уравнения Гельмгольца, так и уравнения Пуассона. Решение обоих этих уравнений (4) строится при помощи метода граничных интегральных уравнений. Подробное описание этих методов представлено в книге [25]. Отметим, что для применения метода граничных интегральных уравнений необходимо построить две специальных функции Грина для функции тока и вихря. Подробный способ построения этих функций приведен в работе [26]. Приведем вид этих функций Грина:

$$G_{\psi}(\xi, \eta) = -\frac{1}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-b_m|\xi-x|} + e^{-b_m(L-|\xi-x|)}}{b_m(1-e^{-b_mL})} \sin b_m y \sin b_m \eta \quad (6)$$

$$G_{\zeta}(\xi, \eta) = -\frac{1}{b\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_m|\xi-x|} + e^{-\lambda_m(L-|\xi-x|)}}{\lambda_m(1-e^{-\lambda_mL})} \sin b_m y \sin b_m \eta \quad (7)$$

где  $b_m = \frac{\pi m}{b}$ ,  $\lambda_m = \sqrt{b_m^2 + \frac{1}{\varepsilon}}$ .

Применяя метод граничных интегральных уравнений к эллиптическим задачам (4) получим, следующие их решения:

$$\psi^{(n)}(x; y) = \int_0^L \int_0^b \zeta^{(n)}(\xi; \eta) G_{\psi}(\xi; \eta) d\xi d\eta + Q \int_0^L \frac{\partial G_{\psi}}{\partial \eta}(\xi; b) d\xi \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \zeta^{(n)}(x; y) = & \int_0^L \int_0^b g^{(n-1)}(\xi; \eta) G_{\zeta}(\xi; \eta) d\xi d\eta - \\ & - \int_0^L \left( \zeta^{(n)}(\xi; 0) \frac{\partial G_{\zeta}}{\partial \eta}(\xi; 0) - \zeta^{(n)}(\xi; b) \frac{\partial G_{\zeta}}{\partial \eta}(\xi; b) \right) d\xi \end{aligned} \quad (9)$$



Подсчитаем более подробно, последний интеграл в выражении (8), если в него подставить точное выражение (6), получим:

$$Q \int_0^L \frac{\partial G_\Psi}{\partial \eta}(\xi; b) d\xi = -\frac{2Q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \sin b_m y}{m} = \frac{Qy}{b} \quad (10)$$

Подставим выражения (10), (6) и (7) в выражения (8) и (9), выделяя медленно сходящуюся часть функциональных рядов и просуммировав ее точно, получим точные решения эллиптических задач (4) в виде:

$$\begin{aligned} \Psi^{(n)}(x; y) = & \varepsilon \left[ \left( \frac{\operatorname{sh} \frac{b-y}{\sqrt{\varepsilon}}}{\operatorname{sh} \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}} + \frac{y}{b} - 1 \right) \zeta^{(n)}(x; 0) + \left( \frac{\operatorname{sh} \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}}{\operatorname{sh} \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}} - \frac{y}{b} \right) \zeta^{(n)}(x; b) \right] + \\ & + \frac{\varepsilon}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} \int_0^L \left[ \zeta^{(n)'}(\tau; 0) - (-1)^m \zeta^{(n)'}(\tau; b) \right] \operatorname{sgn}(\tau - x) \left[ \frac{\lambda_m}{b_m} \frac{e^{-b_m(L-|\tau-x|)} - e^{-b_m|\tau-x|}}{1 - e^{-b_m L}} - \right. \\ & \left. - \frac{b_m}{\lambda_m} \frac{e^{-\lambda_m(L-|\tau-x|)} - e^{-\lambda_m|\tau-x|}}{1 - e^{-\lambda_m L}} \right] d\tau \sin b_m y + \frac{Qy}{b} - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\varepsilon b_m \lambda_m (1 - e^{-b_m L})(1 - e^{-\lambda_m L})} \int_0^L g_m^{(n-1)}(\tau) J_m^0(x; \tau) d\tau \sin b_m y \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \zeta^{(n)}(x; y) = & \frac{\operatorname{sh} \frac{b-y}{\sqrt{\varepsilon}}}{\operatorname{sh} \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}} \zeta^{(n)}(x; 0) + \frac{\operatorname{sh} \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}}{\operatorname{sh} \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}} \zeta^{(n)}(x; b) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\varepsilon \lambda_m (1 - e^{-\lambda_m L})} \int_0^L g_m^{(n-1)}(\xi) \times \\ & \times \left[ e^{-\lambda_m(L-|\xi-x|)} - e^{-\lambda_m|\xi-x|} \right] d\xi \sin b_m y - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{b \lambda_m^2 (1 - e^{-\lambda_m L})} \int_0^L \left[ \zeta^{(n)'}(\xi; 0) - (-1)^m \zeta^{(n)'}(\xi; b) \right] \times \\ & \times \operatorname{sgn}(\xi - x) \left[ e^{-\lambda_m(L-|\xi-x|)} - e^{-\lambda_m|\xi-x|} \right] d\xi \sin b_m y \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$J_m^0(x; \tau) = 2\varepsilon \left\{ \lambda_m (1 - e^{-\lambda_m L}) \left( e^{-b_m(L-|\tau-x|)} + e^{-b_m|\tau-x|} \right) - b_m (1 - e^{-b_m L}) \left( e^{-\lambda_m(L-|\tau-x|)} + e^{-\lambda_m|\tau-x|} \right) \right\}$$

и  $g_m^{(n-1)}(\xi) = \frac{2}{b} \int_0^b g^{(n-1)}(\xi; \eta) \sin b_m \eta d\eta$ . Выражения (11) и (12) и есть точные решения эллиптической задачи (4). Стоит отметить, что для нахождения (11) и (12) на  $n$  временном слое необходимо знать их значение на  $n-1$  временном слое и значение функций  $\zeta^{(n)}(x; 0)$ ,  $\zeta^{(n)}(x; b)$ ,  $\zeta^{(n)'}(\xi; 0)$  и  $\zeta^{(n)'}(\xi; b)$ . Таким образом, представленные решения (11) и (12) являются неявными представлениями функции тока и вихря. Как отмечается в работах [4,5,15] в этом случае алгоритм решения должен быть устойчивым по времени. Стоит отметить, что все члены рядов, входящих в выражения (11) и (12), имеют порядок  $o(m^{-3})$ , что вполне достаточно





для их дифференцирования по переменным  $x$  и  $y$ , и соответственно составления функции  $g^{(n-1)}(x, y)$ .

### Нахождение вихря скорости на стенках канала

Как отмечалось выше, решения (11) и (12) содержат следующие величины:  $\zeta^{(n)}(x; 0)$ ,  $\zeta^{(n)}(x; b)$ ,  $\zeta^{(n)'}(\xi; 0)$  и  $\zeta^{(n)'}(\xi; b)$ . Тогда для нахождения этих решений необходимо знать значения вихря и его производной на границах канала, как функции продольной координаты. Данная трудность является классической проблемой. Для ее преодоления предложены различные способы, описанные в работе [15]. Эта проблема возникает ввиду того, что все граничные условия (3) на стенках канала поставлены для функции тока скорости и ее производной по поперечной координате.

В данной работе для решения этой проблемы предлагается напрямую удовлетворить граничному условию (3). Из этого условия получим, с учетом использования (11), следующую систему граничных интегральных уравнений, для отыскания  $\zeta^{(n)}(x; 0)$ ,  $\zeta^{(n)}(x; b)$ ,  $\zeta^{(n)'}(\xi; 0)$  и  $\zeta^{(n)'}(\xi; b)$ :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_{2m}}{b\lambda_{2m}(1-e^{-b_{2m}L})(1-e^{-\lambda_{2m}L})} \int_0^L [\zeta^{(n)}(\tau; 0) - \zeta^{(n)}(\tau; b)] J_{2m}^0(x; \tau) d\tau = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-1}{2\varepsilon\lambda_{2m}(1-e^{-b_{2m}L})(1-e^{-\lambda_{2m}L})} \int_0^L g_{2m}^{(n-1)}(\tau) J_{2m}^0(x; \tau) d\tau - \frac{2Q}{b} \quad (13)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{2m+1}}{b\lambda_{2m+1}(1-e^{-b_{2m+1}L})(1-e^{-\lambda_{2m+1}L})} \int_0^L [\zeta^{(n)}(\tau; 0) + \zeta^{(n)}(\tau; b)] J_{2m+1}^0(x; \tau) d\tau = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-1}{2\varepsilon\lambda_{2m+1}(1-e^{-b_{2m+1}L})(1-e^{-\lambda_{2m+1}L})} \int_0^L g_{2m+1}^{(n-1)}(\tau) J_{2m+1}^0(x; \tau) d\tau \quad (14)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_{2m}}{b\lambda_{2m}(1-e^{-b_{2m}L})(1-e^{-\lambda_{2m}L})} \int_0^L [\zeta^{(n)'}(\tau; 0) - \zeta^{(n)'}(\tau; b)] J_{2m}^0(x; \tau) d\tau = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\varepsilon\lambda_{2m}(1-e^{-b_{2m}L})(1-e^{-\lambda_{2m}L})} \int_0^L g_{2m}^{(n-1)}(\tau) \operatorname{sgn}(x-\tau) \frac{\partial J_{2m}^*(x; \tau)}{\partial x} d\tau \quad (15)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{2m+1}}{b\lambda_{2m+1}(1-e^{-b_{2m+1}L})(1-e^{-\lambda_{2m+1}L})} \int_0^L [\zeta^{(n)'}(\tau; 0) - \zeta^{(n)'}(\tau; b)] J_{2m+1}^0(x; \tau) d\tau = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\varepsilon\lambda_{2m+1}(1-e^{-b_{2m+1}L})(1-e^{-\lambda_{2m+1}L})} \int_0^L g_{2m+1}^{(n-1)}(\tau) \operatorname{sgn}(x-\tau) \frac{\partial J_{2m+1}^*(x; \tau)}{\partial x} d\tau \quad (16)$$

где

$$\frac{\partial J_m^*(x; \tau)}{\partial x} = 2\varepsilon\lambda_m b_m \left\{ (1-e^{-\lambda_m L}) \left( e^{-b_m(L-|\tau-x|)} - e^{-b_m|\tau-x|} \right) - (1-e^{-b_m L}) \left( e^{-\lambda_m(L-|\tau-x|)} - e^{-\lambda_m|\tau-x|} \right) \right\}$$

Уравнения (13) – (14) необходимы для нахождения значений вихря скорости  $\zeta^{(n)}(x; 0)$  и  $\zeta^{(n)}(x; b)$  на стенках канала, а уравнения (15) – (16) необходимы



для нахождения значений производной по продольной координате вихря скорости  $\zeta^{(n)'}(\xi, 0)$  и  $\zeta^{(n)'}(\xi, b)$  на стенках канала.

Решение систем уравнений (13) – (14) и (15) – (16) производится методом коллокаций, с последующей резекцией бесконечного ряда ядра. Для решения полученных СЛАУ могут быть использованы различные численные методы, в простейшем случае – метод Гаусса. Стоит отметить, что у полученных этим способом СЛАУ матрицы, соответствующие уравнениям (13) и (15) одинаковы, а также одинаковы матрицы, соответствующие уравнениям (14) и (16). Этот факт позволяет существенно экономить затраты по использованию памяти, для организации любого численного метода решения этих систем.

### Результаты численных экспериментов и общие выводы

Разработанный в данной работе пошаговый метод относится к условно сходящимся методам [15]. Это значит, что при достаточно малом шаге по времени  $\theta$  он сходится. Если число Рейнольдса определить как  $Re = Q/v$ , то при фиксированном расходе  $Q$  число Рейнольдса фактически определяется значением кинематической вязкости. Тогда сходимость всегда имеет место, если шаг по времени уменьшается пропорционально с ростом числа Рейнольдса, т.е.  $\theta \sim 1/Re$ . В литературе известно теоретическое критическое число Рейнольдса для двумерного канала (см. [27], стр.191). В принятых нами обозначениях оно равно  $Re^* = 7696$ . Для двух представленных рисунков 2 и 3 начальное распределение физических полей бралось как сильное случайное возмущение течения Пуазейля, - по продольной и поперечной координате. Исходный профиль продольной скорости – сильно несимметричный. Удлиненность канала бралась  $L / b = 7$ .

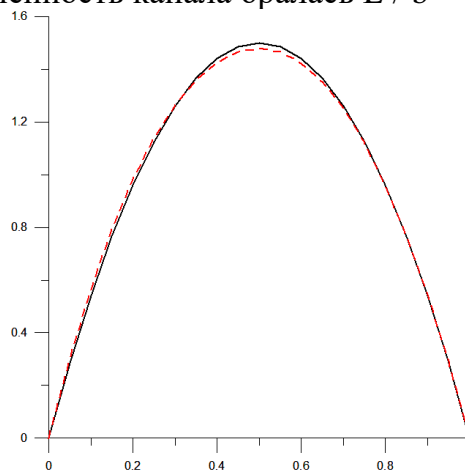
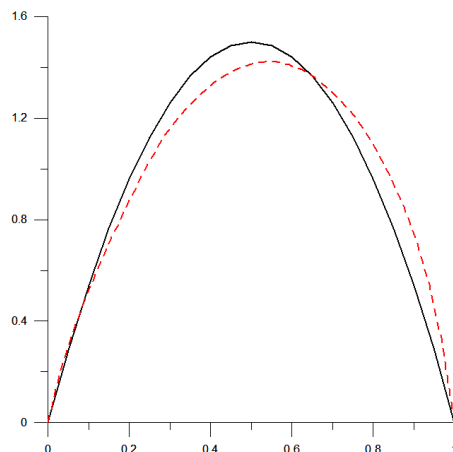


Рис. 2 – Профиль продольной скорости в ламинарном течении:  $Re = 5\,000$

На рисунках 2 и 3 представлены результаты расчетов со следующими параметрами: число членов во всех бесконечных рядах  $M = 4096$ , относительное удлинение выбранной области  $L / b = 7$ , шаг по времени  $\theta = 5 \cdot 10^{-4}$  с, число узлов вдоль канала  $N = 210$ , число итераций  $6 \cdot 10^4$ , полное время процесса в физической области  $t = 30$  с. Заметим, что сплошной линией изображена парабола Пуазейля, а штриховой линией – результаты, полученные выше описанным методом.





**Рис. 3 – Профиль продольной скорости в турбулентном течении:  $Re = 10\,000$**

Из рис. 2 видно, что в ламинарном потоке сильно несимметричный на нулевом шаге профиль продольной скорости довольно быстро становится симметричным, приближаясь с шагами итерации все ближе и ближе к параболе Пуазейля. В то же время, как видно из рисунка 3, в турбулентном режиме профиль скорости все время остается несимметричным. В целом расчеты показывают, что турбулентный режим является осциллирующим, в нем явно прослеживается главная гармоника колебаний с определенным периодом. При этом максимум эпюры продольной скорости периодически смещается в процессе пошагового метода из левой половины в правую и обратно с той периодической закономерностью, о которой сказано выше.

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, проект 9.5794.2017/8.9.*

#### **Список цитируемой литературы:**

1. R. Friedrich, T.J. Huttli, M. Manhart, C. Wagner, Direct numerical simulation of incompressible turbulent flows, *Comput. Fluids* 30 (2001) 555.
2. P.R. Spalart, Direct simulation of a turbulent boundary layer up to  $Re_\tau = 1410$ , *J. Fluid Mech.* 187 (1988) 61.
3. J.G.M. Eggels, F. Unger, M.H. Weiss, J. Westerweel, R.J. Adrian, R. Friedrich, F.T.M. Nieuwstadt, Fully developed turbulent pipe flow: a comparison between direct numerical simulation and experiment, *J. Fluid Mech.* 268 (1994) 175.
4. J. Kim, P. Moin, R. Moser, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.*
5. N.V. Nikitin, Direct numerical modelling of three-dimensional turbulent flows in pipes of circular cross section, *Fluid Dyn.* 29 (6) (1994) 749
6. N.V. Nikitin, Statistical characteristics of wall turbulence, *Fluid Dyn.* 31 (3) (1996) 361
7. Viece JA (1969), A method for including arbitrary external boundaries in the MAC incompressible fluid computing technique, *J. Comput. Phys.* 4, 543–551.
8. Briscolini M and Santangelo P (1989), Development of the mask method for incompressible unsteady flows, *J. Comput. Phys.* 84, 57– 75.
9. Goldstein D, Handler R, and Sirovich L (1993), Modeling no-slip flow boundary with an external force field, *J. Comput. Phys.* 105, 354–366
10. Khadra K, Parneix S, Angot P, and Caltagirone JP (1995), Fictitious domain approach for numerical modeling of Navier-Stokes equations, *4th Int Conf on Navier-Stokes Equations and Related Nonlinear Problem.*
11. Khadra K, Angot P, Parneix S, and Caltagirone JP (2000), Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier-Stokes equations, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 34, 651–684



12. Angot P, Bruneau CH, and Frabrie P (1999), A penalization method to take into account obstacles in viscous flows, *Numerische Mathematik* 81, 497–520
13. Peskin CS (1972), Flow patterns around heart valves: A digital computer method for solving the equations of motion, PhD thesis, Physiology, Albert Einstein College of Medicine, Univ Microfilms 72–30, 378
14. Peskin CS (1977), Numerical analysis of blood flow in the heart, *J. Comput. Phys.* 25, 220–252.
15. П.Дж. Роуч. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 456 с.\
16. Meseguer A., Trefether L.N. Linearized pipe flow to Reynolds number  $10^7$ , *J. Comput. Phys.* 2002. V. 186. P. 187-197
17. Lesieur M., Metais O., Comte P. Large-eddy simulations of turbulence. Cambridge University Press: Cambridge (UK), 2005, 219p.
18. Moser R.D., Kim J., Mansour N.N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau=590$ // *J. Physics of fluid*, 1999. V 11. N 4. P 943-945
19. N. N. Mansour, J. Kim, and P. Moin, “Reynolds-stress and dissipationrate budgets in a turbulent channel flow,” *J. Fluid Mech.* 194, 15 (1988)
20. J. Kim and R. A. Antonia, “Isotropy of the small scales of turbulence at low Reynolds number,” *J. Fluid Mech.* 251, 219 (1993)
21. S. L. Lyons, T. J. Hanratty, and J. B. McLaughlin, “Large-scale computer simulation of fully-developed turbulent channel flow with heat transfer,” *Int. J. Numer. Methods Fluids* 13, 999 (1991)
22. W. K. George, L. Castillo, and M. Wosnik, “A theory for turbulent pipe and channel flow at high Reynolds numbers,” TAM Report No. 872, Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana—Champaign, 1997.
23. .К.В. Воронин, С.А. Соловьев, Решение уравнения Гельмгольца с использованием метода малоранговой аппроксимации в качестве предобуславливателя. Вычислительные методы и программирование. 2015г., Т16, 268 – 280 с.
24. Ф.Н. Ясинский, А.В. Евсеев, О решении уравнения Навье – Стокса в переменных «функция тока - вихрь» на многопроцессорной вычислительной машине с использованием системы CUDA, Вестник ИГЭУ, Вып.3, 2010г.
25. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир. 1984. 497 с.
26. Сумбатян М.А., Абрамов В.В., Полуаналитический метод расчета течения вязкой несжимаемой жидкости в канале постоянной ширины, Известия вузов. Северо – Кавказский регион. Естественные науки, 201, №1, с.42 – 47.
27. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит. 2005. 288 с.