



УДК 62-50

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ УСЛОВИЯ МАКСИМУМА ФУНКЦИИ ОБОБЩЕННОЙ МОЩНОСТИ НА МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

С.В. Лазоренко¹, З.В. Лященко², rh3311@mail.ru, hrustyaz@mail.ru.

¹Донской государственный технический университет (ДГТУ), г. Ростов-на-Дону

²Ростовский университет путей сообщения (РГУПС), г. Ростов-на-Дону

Задачи оптимизации динамических систем сложны и сводятся к двухточечной краевой задаче как следствие принципа максимума. Ещё большей сложностью характеризуется задача синтеза оптимального управления, поскольку нет конструктивных универсальных методов получения закона управления из решения краевой задачи принципа максимума. Поэтому всегда актуальна задача получения законов управления близких к оптимальному целью их практической реализации, если этого достаточно, и ее решение объективно необходимо для использования как первое приближение к оптимальному закону при использовании итерационной схемы решения двухточечной краевой задачи. Предложен вариант синтеза квазиоптимального закона управления на основе условия максимума функции обобщенной мощности на множестве функций ограниченной вариации. Работа подготовлена при поддержке гранта РФФИ N 18-08-01494.

Ключевые слова: голономная управляемая динамическая система, условия минимума целевого функционала, подынтегральная функция целевого функционала.

SYNTHESIS OF MANAGEMENT ON THE BASIS OF THE CONDITION OF THE MAXIMUM COMMUNICATED POWER FUNCTION ON A MULTIPLE FUNCTIONS OF LIMITED VARIATION

S.V. Lazorenko¹, Z.V. Lyashchenko²

¹Don State Technical University (DSTU), Rostov-on-Don

²Rostov State Transport University (RSTU), Rostov-on-Don

The optimization problems of dynamic systems are complex and reduce to a two-point boundary value problem as a consequence of the maximum principle. An even more complex problem is the synthesis of optimal control, since there are no constructive universal methods for obtaining the control law from solving the boundary value problem of the maximum principle. Therefore, the problem of obtaining control laws close to the optimal goal of their practical implementation is always relevant, if this is sufficient, and its solution is objectively necessary for use as a first approximation to the optimal law when using an iterative scheme for solving a two-point boundary value problem. A version of the synthesis of a quasi-minimal control law is proposed based on the maximum condition of the generalized power function on a set of functions of bounded variation. The work was prepared with the support of the RFBR grant N 18-08-01494.

Keywords: holonomic controlled dynamic system, minimum conditions of the target functional, integrand function of the target functional.

Интеграл действия рассматриваемой голономной управляемой динамической системы имеет вид:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T + A) dt, \quad (1)$$

Где $T = \frac{1}{2} \sum_{s,k=1}^n a_{sk}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_s \dot{q}_k$ – кинетическая энергия; $a_{sk}(\mathbf{q}, t)$ – коэффици-

енты инерции, которые ограничены при всех $\mathbf{q}$; $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T \in R^n$ – вектор



обобщенных координат; $A = \int_{q_s(t_0)}^{q_s(t_1)} \sum_{s=1}^n Q_s dq_s$ – работа обобщенных внешних сил

$\mathbf{Q} = [Q_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t), \dots, Q_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t)]^T$ – непрерывный по совокупности переменных вектор обобщенных сил, обусловленных наличием воздействий различного рода [1]; $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T \in \bar{G}_u$ – вектор управляющих воздействий; $\bar{G}_u$ – замкнутое множество допустимых управлений; $\mathbf{q}(t_0), \mathbf{q}(t)$ – начальное и текущее состояние вектора обобщенных координат; $n = \dim \mathbf{q}$ – число степеней свободы динамической системы, $m = \dim \mathbf{u}$ – размерность вектора управления, $n \geq m$; T – знак транспонирования; $[t_0, t_1] \subset R$ – замкнутый интервал времени, за которое происходит изменение состояния.

Согласно принципу Гамильтона – Остроградского, при движении из начального состояния

$$t = t_0, \mathbf{q}(t_0) = [q_{10}, \dots, q_{n0}]^T, \dot{\mathbf{q}}(t_0) = [\dot{q}_{10}, \dots, \dot{q}_{n0}]^T \quad (2)$$

в конечное состояние

$$t = t_1, \mathbf{q}(t_1) = [q_{11}, \dots, q_{n1}]^T, \dot{\mathbf{q}}(t_1) = [\dot{q}_{11}, \dots, \dot{q}_{n1}]^T \quad (3)$$

системы под действием управления $\mathbf{u}$ на истинной траектории для интеграла действия (1) справедливо

$$\delta' S = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' A) dt = 0, \quad (4)$$

где [3]

$$\delta' A = \sum_{s=1}^n Q_s \delta q_s,$$

– элементарная работа на виртуальных перемещениях, а знак δ' обозначает бесконечно малую величину, зависящую от вектора вариаций обобщенных координат [2]. Из (4) происходят уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, \quad s = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Принято, что обобщенные силы могут совпадать с управлением аддитивно, мультипликативно или зависеть от него [4]. Анализируется случай, который «играет центральную роль при рассмотрении систем вида (5) и их обобщений» [5]

$$\mathbf{Q} = \mathbf{u}.$$

Допустим, что заданная определенно-положительная функция $F(\mathbf{q})$ наряду со своими частными производными скалярная непрерывная на ограниченном замкнутом интервале времени $[t_0, t_1] \subset R$.

Задача синтеза управления в таком случае: определить вектор-функцию $\mathbf{Q}$ из условия минимума целевого функционала



$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{q}) dt, \quad (6)$$

при условиях (2), (3), (4) и ограничении $\mathbf{Q} \in \overline{G}$, где $\overline{G}$ – замкнутое множество допустимых обобщенных сил.

Вариационное неравенство. Рассматривается расширенный целевой функционал [6-8]

$$I_1 = I + \lambda S, \quad (7)$$

где λ – множитель Лагранжа.

Пусть существует доставляющая минимум (6) вектор-функция $\tilde{\mathbf{Q}} \in \overline{G}$. Ее вариация приводит обобщенной силе $\mathbf{Q} \in \overline{G}$. Тогда

$$\Delta I_1(\delta \mathbf{Q}) = I_1(\mathbf{Q}) - I_1(\tilde{\mathbf{Q}}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{Q} \neq \tilde{\mathbf{Q}}, \quad (8)$$

где $\delta \mathbf{Q}(t)$ – вариация обобщенной силы.

Из (2), (3) следует, что при варьировании обобщенной силы переход системы из начального положения в конечное по окольному пути должен совершаться за одно и тоже время. Откуда полная (асинхронная) вариация обобщенной координаты с точностью до величин первого порядка малости определяется так [9,10]:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}(t) &= \Delta \mathbf{q}(t) + \dot{\mathbf{q}}(t) \delta t, \\ \delta \mathbf{q}(t_0) &= \delta \mathbf{q}(t_1) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где δt – произвольная неотрицательная бесконечно малая величина, $\Delta \mathbf{q}(t)$ – синхронная вариация. Элементарная работа, вариация кинетической энергии и приращение подынтегральной функции целевого функционала (8) могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta T &= \sum_{s=1}^n \left[\frac{\partial T}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right], \\ \delta' A &= \sum_{s=1}^n Q_s \delta q_s, \\ \delta' F &= \sum_{s=1}^n V_s(\mathbf{Q}) \delta q_s, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$V_s(\mathbf{Q}) = \text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial q_s}$$

– фиктивная обобщенная сила.

В соответствии с (10) приращение элементарной работы, подынтегральной функции целевого функционала и вариацию кинетической энергии на замкнутом интервале $[t_0, t_1]$ можно представить выражениями



$$\begin{aligned}
 \delta' \tilde{A} &= \sum_{s=1}^n \tilde{Q}_s \delta q_s \quad \forall \delta Q_s = 0, \\
 \delta' A &= \sum_{s=1}^n \delta Q_s \delta q_s + \delta' \tilde{A} \quad \forall \delta Q_s \neq 0, \\
 \delta' \tilde{F} &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_s} \delta q_s = \sum_{s=1}^n V_s(\tilde{\mathbf{Q}}) \delta q_s \quad \forall \delta Q_s = 0, \\
 \delta' F_\tau &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial F(\mathbf{Q})}{\partial q_s} \delta q_s = \delta' \tilde{F} + \sum_{s=1}^n [V_s(\mathbf{Q}) - V_s(\tilde{\mathbf{Q}})] \delta q_s = \delta' \tilde{F} + \sum_{s=1}^n \delta' V_s \delta q_s \quad \forall \delta Q_s \neq 0, \\
 \delta T &= \sum_{s=1}^n \left[\frac{\partial T}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right].
 \end{aligned} \tag{11}$$

Распорядимся выбором множителя Лагранжа следующим образом

$$\dot{\lambda} = 0.$$

Тогда с учетом (10), (11) приращение расширенного функционала (8) записывается следующим образом:

$$\Delta I_1 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n [\lambda \delta Q_s + \delta' V_s] \delta q_s dt + \int_{t_0}^{t_1} [\lambda [\delta T + \delta' A] + \delta' F] dt.$$

Слагаемое из (11), содержащее вариацию кинетической энергии, интегрируется по частям

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_0}^{t_1} \lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s dt = \\
 &= \lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right] \delta q_s dt = \lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\dot{\lambda} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \lambda \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right] \delta q_s dt,
 \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}
 \Delta I_1 &= \lambda \sum_{s=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n [\lambda \delta Q_s + \delta' V_s] \delta q_s dt + \\
 &+ \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \lambda \sum_{s=1}^n \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_s} + \tilde{Q}_s \right] \delta q_s + \sum_{s=1}^n V_s \delta q_s \right\} dt.
 \end{aligned}$$

В соответствии с (5), (3) выражение для приращения функционала принимает вид

$$\Delta I_1 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n [\lambda \delta Q_s + \delta' V_s] \delta q_s dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n V_s \delta q_s dt. \tag{12}$$



В силу не отрицательности подинтегральной функции, для которой $\delta' \tilde{F} \geq 0$, знак (12) определяется первым слагаемым. Для выполнения условия (8) необходимо, чтобы

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n [\lambda \tilde{Q}_s + V_s(\tilde{\mathbf{Q}})] \delta q_s dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^n [\lambda Q_s + V_s(\mathbf{Q})] \delta q_s dt. \quad (13)$$

Рассмотрение вариационного неравенства (13) имеет смысл проводить для конкретного множества допустимых управлений (обобщенных сил).

Список цитируемой литературы

1. Костоглолов А.А., Андрашитов Д.С., Дмитренко Г.Н., Лазаренко С.В. сравнение оптимальных управлений полученных на основе объединённого принципа максимума и принципа максимума Л.С. Понтрягина // Измерительная техника. 2001. № 1.
2. Костоглолов А.А., Дерюшев В.В., Костоглолов А.И. Идентификация параметров динамических систем на основе объединённого принципа максимума // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2004. № S2. С. 13-18.
3. Дерябкин И.В., Костоглолов А.А., Лазаренко С.В., Чеботарев А.В., Ценных Б.М. Метод идентификации параметров динамических систем на основе совмещенного с физическими принципами синтеза // Нелинейный мир. 2012. Т. 10. № 11. С. 801-809.
4. Костоглолов А.А., Лященко З.В., Лазаренко С.В. синтез управления с адаптацией к неконтролируемым воздействиям в неустойчивом состоянии // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. 2016. № 1 (61). С. 66-71.
5. Костоглолов А.А., Лазаренко С.В. Синтез адаптивных систем сопровождения на основе гипотезы о стационарности гамильтониана гиперповерхности переключения // Радиотехника и электроника. 2017. Т. 62. № 2. С. 121-125.
6. Костоглолов А.А., Лазаренко С.В., Кузнецов А.А. структурный синтез дискретных адаптивных следящих систем на основе объединённого принципа максимума // Вестник Донского государственного технического университета. 2017. Т. 17. № 1. С. 105-112.
7. Костоглолов А.А., Лазаренко С.В., Пугачев И.В., Чеботарев А.В. Синтез оптимальной по быстродействию системы фазовой автоподстройки частоты на основе объединённого принципа максимума // В сборнике: Актуальные вопросы современной техники и технологии Сборник трудов конференции. 2013. С. 84-87.
8. Костоглолов А.А., Кузнецов А.А. Синтез интеллектуальной измерительной процедуры на основе метода минимальных ошибок // Измерительная техника. 2005. № 7. С. 8-13.
9. Andrashitov D.S., Kostoglov A.A., Kuznetsov A.A., Lazarenko S.V. Structural synthesis of lagrangian systems of automatic control with the use of first integrals of motion // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2015. Т. 13. № 12. С. 12-18.