



УДК 004.942

ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТА

В.Н. Кубил, vksend@gmail.com

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)
имени М.И. Платова, г. Новочеркасск

В данной статье описаны различные подходы к моделированию одной из наиболее важных и известных задач комбинаторной оптимизации и целочисленного программирования – задачи маршрутизации транспорта. Большое число реальных приложений широко показало, что использование программной оптимизации и автоматизированных процедур при решении VRP дает существенную экономию в глобальных транспортных расходах, но для успешного использования методов оптимизации необходимо иметь математическую модель решаемой задачи, которая может рассматриваться как отправная точка при разработке алгоритмов. Проведен анализ работ мировых ученых, который показал, что при формулировании VRP как задачи целочисленного программирования используются несколько основных подходов к моделированию, определяющих способ задания целевой функции и ограничений задачи. В статье также предлагается подход к моделированию задачи, в основе которого лежит задание вектора-маршрута, что удобно при разработке некоторых эвристических алгоритмов и позволяет учесть сложные реальные ограничения.

Ключевые слова: задача маршрутизации транспорта, математическая модель, комбинаторная оптимизация, линейное программирование.

APPROACHES TO MODELLING THE VEHICLE ROUTING PROBLEM

V.N. Kubil

Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk

This article discusses different approaches to modelling one of the most important combinatorial optimization and integer programming problem – the Vehicle Routing Problem (VRP). The large number of real-world applications have widely shown that the use of computerized solution techniques and automated procedures for the solution of VRP, yields substantial savings in the global transportation costs, but in order to use optimization methods it is necessary to have a mathematical model of the problem, that may be considered as starting points in the design of algorithms. The analysis of world scientists works is carried out and it was found a few basic modeling approaches which are used in formulating the VRP as a problem of integer programming, determining the method of specifying the objective function and constraints. The article also proposes an approach to modeling the problem, which is based on assignment of the route vector, that is useful in the in the design of some heuristics and allows to take into account complex real constraints.

Keywords: vehicle routing problem, VRP, mathematical model, combinatorial optimization, linear programming.

Введение. В последние десятилетия увеличилось использование пакетов оптимизации на основе исследований операций и методов математического программирования для эффективного управления предоставлением товаров и услуг в системах распределения [1]. В данной статье рассматривается одна из наиболее известных задач распределения, относящихся к области комбинаторной оптимизации и целочисленного программирования.

Задача маршрутизации транспорта (*Vehicle Routing Problem, VRP*) заключается в поиске оптимального набора маршрутов через множество удаленных точек с учетом ряда ограничений. VRP, являясь обобщением хорошо известной задачи коммивояжера (*Travelling Salesman Problem, TSP*), также относится к классу NP-трудных задач, но имеет принципиальное отличие: маршрутов в решении может быть несколько. На практике задача обычно касается распределения грузов из пунктов производства по пунктам потребления, в связи с чем общепринятая терминология отличается от TSP и включает понятия,



заимствованные из области транспортной логистики: дорожная сеть, транспортное средство, клиент, депо и др.

Высокая сложность, в совокупности с практической значимостью, уже несколько десятилетий привлекает интерес мирового сообщества к поиску эффективных методов решения данного класса задач. Однако в отечественной литературе работы, посвященные исследованию VRP, встречаются не часто [2], поэтому в качестве отправной точки целесообразно брать зарубежные изыскания.

В действительности использование программной оптимизации и ЭВМ для автоматизированного решения VRP и других транспортно-логистических задач позволяет значительно сэкономить средства предприятия [3] и уменьшить конечную стоимость продукта [4]. Успех использования методов оптимизации обусловлен не только мощностью современных вычислительных систем и полной интеграцией информационных технологий в операционные и коммерческие процессы, но также объясняется разработкой строгих математических моделей, которые позволяют учитывать почти все характеристики VRP, возникающие в реальных условиях на практике [1]. Более того, зачастую формальная постановка оптимизационной задачи определяет методы ее решения.

Базовые модели. Существует большое число разновидностей VRP с различными дополнительными условиями и ограничениями, однако целью данной статьи является анализ подходов к формальному описанию, лежащих в основе любой математической модели VRP, поэтому в дальнейшем будет рассматриваться исключительно классический случай.

В мировой литературе, посвященной данному классу задач, наиболее часто встречаются три базовых подхода к моделированию VRP. Все они позволяют сформулировать VRP как задачу линейного программирования, тем самым облегчают поиск методов решения.

Модели первого типа (*vehicle flow formulations*) встречаются наиболее часто и используют целочисленные переменные, связанные с каждой дугой (ребром, в симметричном случае) графа и указывающие на число переходов по нему в маршруте. Они особенно подходят для случаев, когда стоимость решения может быть выражена как сумма затрат, связанных с дугами, и когда наиболее значимые ограничения касаются прямого перехода между клиентами в пределах маршрута и могут быть эффективно смоделированы с помощью соответствующего определения набора дуг и стоимостей переходов по ним. С другой стороны, такие модели не могут использоваться для решения многих практических вопросов, например, когда стоимость решения зависит от общей последовательности вершин или от типа транспортного средства, назначенного маршруту.

Модели второго типа (*commodity flow formulation*) используют дополнительные целочисленные переменные, связанные с дугами и представляют поток товаров вдоль путей, пройденных транспортными средствами.

Модели третьего типа (*set partitioning problem*) имеют экспоненциальное число двоичных переменных, каждая из которых связана с одним из допустимых наборов маршрутов. При этом VRP формулируется как задача разбиения с поиском набора маршрутов минимальной стоимости, удовлетворяющих заданным ограничениям. Основным преимуществом модели этого типа является то, что она позволяет представить наиболее общие затраты маршрута, например, в зависимости от всей последовательности дуг и типа транспортного средства. Более того, отпадает необходимость учитывать ограничения, относящиеся к



отдельным маршрутам. Однако следует отметить, что в таких моделях требуется задействовать очень большое число переменных.

Рассмотрим построение наиболее распространенного варианта математической модели VRP первого типа. Наиболее удобно описать задачу маршрутизации транспорта можно в терминах теории графов.

Пусть дан полный граф $G = (V, A)$, в котором $V = \{0, \dots, n\}$ – множество вершин, A – множество дуг. Вершины $i = 1, \dots, n$ соответствуют клиентам, а вершина $\{0\}$ соответствует депо. С каждой дугой $(i, j) \in A$ связана неотрицательная стоимость c_{ij} перехода между вершинами i и j . Количество транспортных средств и, соответственно, маршрутов в искомом решении, составляет K .

Как и во всех базовых моделях, вводится двух-индексная двоичная переменная x_{ij} , в данном примере означающая вхождение конкретной дуги $(i, j) \in A$ в решение при значении 1, в противном случае 0. Тогда математическая модель будет выглядеть следующим образом:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij}, \quad (1)$$

при условии:

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i0} = K, \quad (4)$$

$$\sum_{j \in V} x_{0j} = K, \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V. \quad (6)$$

Выражение (1) является целевой функцией, которую требуется минимизировать. Ограничения (1) и (2) указывают на то, что в маршрутах только одна дуга входит в вершину, связанную с клиентом, и, соответственно, только одна дуга выходит. Условия (4) и (5) указывают, что все маршруты начинаются и заканчиваются в депо, а их количество равно числу транспортных средств. Последним (6) указано условие целочисленности. Ограничение грузоподъемности является базовым для большинства разновидностей VRP и может быть описано одним дополнительным условием в представленной модели, но в представленной модели намеренно опущено, т.к. не определяет концепцию подхода к моделированию задачи.

Как видно из описанной модели задачи, с ее помощью легко может быть описана общая стоимость решения, зависящая от суммарной длины всех маршрутов либо от переходов между отдельно взятыми парами вершин. Кроме того, для описания решения достаточно одной единственной матрицы $n \times n$ двоичных переменных, связанных с дугами графа. В то же время невозможно либо затруднено описание условий и критериев, связанных с последовательностью вершин: упомянутая матрица не указывает в явном виде на порядок следования переходов между вершинами, а только их наличие в решении.

Более полное представление о других базовых моделях VRP можно получить из работ Тота и Виго [1]. В данной же работе предлагается к



рассмотрению нетрадиционный подход к моделированию задачи маршрутизации, в основе которого лежит задание вектора-маршрута.

Модель с использованием вектора-маршрута. Дан полный граф $G = (V \cup V_0, A)$, в котором $V = \{v_0, \dots, v_n\}$ – множество всех вершин, причем вершина $\{v_0\}$ представляет депо, а вершины $\{v_1, \dots, v_n\}$ представляют клиентов; $A = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V, i \neq j\}$ – множество дуг между вершинами.

Необходимо определить такой набор маршрутов R из области допустимых решений, чтобы общая стоимость с учетом всех критериев была минимальной:

$$\min \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{|r^k|} c_{r_{i-1}^k, r_i^k}^k, \quad (6)$$

при условии:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{|r^k|} (r_i^k : r_i^k = v_j) = 1 \quad \forall v_j \in V \setminus \{v_0\}, \quad (7)$$

$$r_i^k \in V \setminus \{v_0\} \quad \forall r^k \in R \wedge \forall i = 1, \dots, |r^k| - 1, \quad (8)$$

$$r_{l_k}^k = r_0^k = v_0 \quad \forall r^k \in R, \quad (9)$$

где m – число доступных транспортных средств; $r^k \in R$ – вектор вершин маршрута k -го транспортного средства; r_i^k определяет i -ю вершину маршрута k -го транспортного средства в порядке посещения, $|r^k|$ – количество вершин в маршруте.

Выражение (6) является целевой функцией, которую требуется минимизировать. Ограничение (7) означает, каждая вершина множества V должна входить только в один маршрут. Ограничения (8) и (9) гарантируют, что маршрут начнется и закончится в депо без промежуточных возвратов.

Данная модель позволяет учитывать критерии, зависящие от последовательности вершин в маршруте (порядка обслуживания клиентов). В частности, суммарное время T ожидания каждого клиента можно описать следующим образом:

$$T = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{|r^k|-1} \left(\sum_{j=1}^i t_{r_{j-1}^k, r_j^k} \right)^\tau,$$

где t_{ij} – время, требуемое на переход между вершинами i и j . Необязательный параметр τ позволяет гибко управлять характером изменения стоимости (штрафом), в зависимости от времени ожидания отдельных клиентов. Очевидно, данное выражение должно выступать в качестве одной из минимизируемых целевых функций, при наличии соответствующего требования учесть время ожидания клиентов. Присутствующий дополнительный индекс k позволяет, при необходимости, учитывать разнородность парка транспортных средств без внесения существенных изменений в модель.

В то же время представленная модель может обеспечить компромиссное число используемых переменных, определяемое количеством маршрутов и максимальной длиной каждого маршрута. Однако нужно иметь в виду, что вместо двоичных переменных в данном случае используются последовательности целочисленных индексов вершин в маршрутах.

Кроме того, такая формулировка задачи соответствует ходу решения некоторыми алгоритмами, в которых маршруты формируются последовательно



как совокупность переходов между вершинами, в частности, при оптимизации по принципу муравьиной колонии (муравьиный алгоритм) [4].

К основным недостаткам модели следует отнести более узкую направленность и наличие необходимого при описании дополнительного уровня индексов, указывающих на порядок вершин в маршруте.

Выводы. Рассмотрены наиболее известные подходы к моделированию задачи маршрутизации транспорта, приведены принципиальные отличия базовых моделей. Предложенный подход к моделированию задачи с использованием вектора-маршрута позволил получить компактную модель классической задачи маршрутизации транспорта, с помощью которой были выделены основные преимущества и недостатки подхода.

Список цитируемой литературы

1. Toth P., Vigo D. Vehicle routing: problems, methods, and applications // MOS-SIAM Series on Optimization. – Philadelphia, 2014. – P.463
2. Гладков Л. А., Гладкова Н. В. Особенности и новые подходы к решению динамических транспортных задач с ограничением по времени // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2014. – №. 7 (156). – С.178-187
3. Hasle G., Lie K. A., Quak E. Geometric modelling, numerical simulation, and optimization // Applied Mathematics at SINTEF. – Heidelberg : Springer, 2007. – P.558
4. Rodrigue J. P., Comtois C., Slack B. The geography of transport systems. // Taylor & Francis. – London: Routledge, 2016. – P.454
5. Кубил В.Н., Мохов В.А. Применение муравьиного алгоритма в задачах многокритериальной оптимизации с изменяющимися условиями // Информационно-телекоммуникационные системы и технологии: материалы Всерос., науч.-практ. конф. – Кемерово, 2015. – С.80-81.

© В.Н. Кубил, 2019