



УДК 621.327

ВЫБОР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПИКСЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ С ЭФФЕКТОМ ДЕНОЙЗИНГА

Алатар А.И., mih01@mail.ru, Михайлов А.А., mih01@mail.ru

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)
имени М.И. Платова, г. Новочеркасск

В данной статье рассматриваются возможности использования существующих методов *wavelet* – анализа искаженных шумом сигналов, с малым отношением сигнал/шум, в рамках технологии проектирования информационных систем автоматического восстановления (реконструкции) искаженных изображений, для выбора алгоритмов информационного, математического и программного обеспечения преобразования выходного сигнала пикселя. Анализ, проведенный в работе, показал, что универсальным и удобным инструментом для обработки искаженных шумом стационарных сигналов, с малым отношением сигнал/шум, является *wavelet* преобразование, базирующееся на преобразовании Фурье. Свойства *wavelet* преобразования обеспечиваются за счет интегрирующих свойств преобразования Фурье, для которых интеграция осуществляется по всей временной оси. Глобальный характер преобразования Фурье определяет и их недостатки. Для преодоления этой особенности в *wavelet* преобразовании применяется локализация сигнала во времени.

Ключевые слова: принцип неопределенности Гейзенберга, базис *wavelet* – функции, свойства *wavelet* – преобразования, базис Рисса, денойзинг, фрактальная размерность, показателя Херста, относительная дисперсия, энтропия.

THE TRANSFORMATION OF PIXEL VALUES DYNAMIC IMAGES WITH THE EFFECT OF DENOISING

Alatar A. I., Mikhaylov A.A

Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk

This article discusses the possibility of using existing methods of wavelet analysis of distorted signal interference with a small signal-to-noise ratio, in the design of information systems for automatic restoration (reconstruction) of distorted images, to select algorithms for information, mathematical and software conversion of the output pixel signal. The analysis showed that the wavelet transform based on the Fourier transform is a universal and convenient tool for processing the distorted noise of stationary signals with a small signal-to-noise ratio. The wavelet transform properties are provided by the integrating properties of the Fourier transform for which integration is carried out along the entire time axis. The global nature of the Fourier transform determines their shortcomings. To overcome this feature, the wavelet transform uses time-dependent localization of the signal, i.e. apply the Fourier transform only to a small part of the signal.

Keywords: the Heisenberg's uncertainty principle, the basis wavelet function, the properties of the wavelet transform, a Riesz basis, denoising, fractal dimension, Hurst exponent, relative variance, entropy

Постановка задачи исследования. При обработке спектров сигналов одной из проблем является учет влияния шума, искажающего экспериментальные данные. В результате математической обработки результатов спектроскопического эксперимента возможно получить качественную информацию о динамическом изображении [1]. Эволюция и развития алгоритмов и средств цифровой обработки сигналов поставили задачу применения новых методов для обработки. Неотъемлемой чертой принимаемых сигналов является наличие белого гауссовского шума. Фильтрация случайных сигналов из шумов является классической в теории линейной и нелинейной фильтрации сигналов.

Представим исследуемый сигнал $x=(x_1, x_2, \dots, x_L)$ в виде



$$x_i = f_i + \sigma \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \dots, L,$$

где f_i – детерминированный сигнал, ε_i – белый гауссовский шум, σ – дисперсия шума, L – длина сигнала.

Надо найти оценку сигнала \hat{f} , минимизирующую средний квадрат ошибки

$$R(f, \hat{f}) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L E(\hat{f}_i - f_i)^2.$$

Данные, представляющие какое-либо изображение, могут храниться на компьютере таким образом, что изображение может быть восстановлено с точностью, достаточной для получения полной информации. Для этого изображение сканируется и оцифровывается, каждый квадратный дюйм разбивается на решетку 500×500 маленьких квадратов, называемых пикселями. Каждый пиксель задается значением шкалы яркости, соответствующим его потемнению, с масштабом от 0 до 255. Так как целые числа от 0 до 255 могут быть представлены в двоичной системе с использованием 8 знаков (т. е. каждое целое число от 0 до 255 соответствует 8-значной последовательности нулей и единиц), то они занимают 8 двоичных бит (один байт) данных для определения потемнения одного пикселя.

При решении задачи подавления помех на изображениях [2, 3] используются преобразования Фурье, Радона, косинус-преобразования, бинаризация изображений с отсечением по порогу, выравнивание гистограмм, винеровская, медианная и ранговая фильтрации, создание маски специального фильтра (Гаусса, Лапласа, Собеля и др.), морфологические операции над бинарными изображениями и т.д. [2 – 5], а также методы повышения устойчивости алгоритмов реконструкции изображения (метод Тихонова), которые могут быть недостаточными для повышения качества изображения, если данные являются достаточно зашумленными. При этом используются методы оценки надежности алгоритмов слежения за движущимися объектами (показатели Липшица², Ляпунова³, критерий *Forward – Backward*⁴),

Целью статьи является разработка новых и использование существующих методов математической обработки искаженных шумом сигналов, с малым отношением сигнал/шум, на основе *wavelet* – анализа.

Исследование возможностей преобразования Фурье. Универсальным и удобным инструментом для сравнения и анализа стационарных сигналов является

² Показатель Гёльдера – Липшица – характеристика гладкости функции. Локальный (точечный) показатель Гёльдера – Липшица характеризует локальную гладкость функции в точке.

³ Показатель Ляпунова – величина, характеризующая скорость удаления друг от друга траекторий. Положительность показателя Ляпунова свидетельствует о хаотическом поведении системы.

⁴ Критерий оценки надежности траектории, заданной последовательностью изображений *FB* (*Forward -Backward* – вперед-назад) определяется как расстояние между этими двумя траекториями: $FB(T_{f,k} | S) = \text{distance}(T_{f,k}, T_{b,k})$. Точка x_{t+k} отслеживается назад до кадра t и дает $T_{b,k} = (\hat{x}_t, \hat{x}_{t+1}, \dots, \hat{x}_{t+k})$, где $\hat{x}_{t+k} = x_{t+k}$ и используется евклидово расстояние между объектом в начальный момент времени и объектом, который покажет алгоритм при слежении за объектом в обратном направлении:

$$\text{distance}(T_{f,k}, T_{b,k}) = \|x_t - \hat{x}_t\|.$$



преобразование Фурье, что обеспечивается за счет *интегрирующих свойств* преобразования Фурье по всей временной оси. Достоинства и недостатки преобразования Фурье порождены его глобальным характером. Для преодоления этой особенности достаточна локализация сигнала во времени, и применение преобразования Фурье к малой части сигнала.

Для расширения множества стационарных сигналов – так называемые локально-стационарные сигналы, то есть сигналы, в определенном смысле стационарные на некотором участке временной оси, имеет смысл организовать преобразование, чтобы оно "игнорировало" некоторые участки оси времени. Такой анализ позволит выяснить частотное поведение сигнала на каждом интервале, что даст уже не просто частотную, а частотно-временную картину. Подобный подход определяет разработку кратковременное преобразование Фурье (*Short Time Fourier Transform* или *STFT*) функции f , используя функция окна, для чего предполагается разбиение сигнала на несколько "мелких" порций. Под функцией окна понимается произвольная гладкая функция - множитель с конечным носителем $\omega(t)$ в виде

$$STFT_x^{(w)}(t, f) = \int [x(t) * \omega'(t - t')] e^{j2\pi ft} dt.$$

Функция – множитель ω может быть гауссовской функцией, которая обладает конечным носителем и непрерывна. Используются и другие функции окна, которые не обязательно обладают достаточной гладкостью.

STFT является функцией двух переменных – *частоты* и *времени*, причем на исходную функцию посредством умножения накладывается окно, что дает картину уже в частотно - временной области, а не просто в частотной. Однако *STFT* характеризуется недостатком, происходящий от принципа неопределенности Гейзенберга⁵, который математически может быть представлен как:

$$4\pi\Delta E\Delta t > 1.$$

Аналогичное соотношение можно получить для преобразования Фурье, так если

$$\Delta f^2 = (\int f^2 |G(f)|^2 df) / (\int |G(f)|^2 df),$$

где G – преобразование Фурье сигнала g .

Величина Δf называется шириной спектра сигнала g . Аналогично положим

$$\Delta t^2 = (\int t^2 |g(t)|^2 dt) / (\int |g(t)|^2 dt).$$

Величина Δt называется разбросом времени сигнала.

Каждая из данных выражений определяет насколько данная функция (сигнал или его спектр) "размазан" вдоль соответствующей оси.

Принцип Гейзенберга для преобразования Фурье можно записать в виде:

$$4\pi\Delta f\Delta t > 1.$$

Если сигнал узко локализован во времени, то его спектр рассредоточен по всей оси частот, и наоборот, что обуславливает ограничения применимости *STFT*. Если

⁵ Принцип неопределенности Гейзенберга гласит, что импульс и положения элементарной частицы не могут быть определены с исчерпывающей точностью одновременно.



окно имеет хорошее разрешение во временной области, то оно имеет плохое разрешение в частотной и наоборот. Применимость *STFT* определяется *разрешением* по оси времени и частоты, являющейся величиной постоянной для всего преобразования.

Общий анализ *wavelet*-преобразования. При анализе любого сигнала, используют альтернативный анализ со многими разрешениями (*Multiresolution Analysis–MRA*), который позволяет анализировать сигнал на различных частотах с разным разрешением. Причем в практических приложениях компоненты структуры сигнала с высокой частотой имеют небольшую длительность, а низкочастотные компоненты – достаточно большую, что соответствует *wavelet – преобразованию*⁶ для усе-чения высокочастотных частей спектров.

Любая локализованная *R*-функция $\psi \in L^2(R)$ называется *R*-вейвлетом (или просто вейвлетом), если для нее существует функция $\hat{\psi}$ (ее пара, двойник) такая, что семейства $\{\psi_{jk}\}$ и $\{\hat{\psi}\}$ построенные согласно $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, $j, k \in I$ (7) нормированные на единицу, т.е. $\|\psi_{jk}\|_2 = \|\psi\|_2 = 1$ и $\psi^{jk}(t) = \hat{\psi}_{jk}(t) = 2^{j/2} \hat{\psi}(2^j t - k)$, $j, k \in I$ (15), являются парными базисами функционального пространства $L^2(R)$.

Непрерывное *wavelet*-преобразование (*Continue Wavelet Transform – CWT*) разработано для преодоления сложности, связанной с разрешением по времени и частоте в *STFT*. *Wavelet* - анализ выполняется как и *STFT*: сигнал умножается на функцию (*wavelet*), подобную окну в *STFT* и преобразование выполняется отдельно для различных сегментов сигнала во временной области с различием:

- При *CWT* не выполняется преобразование Фурье взвешенного сигнала.
- При *CWT* ширина окна меняется по мере вычисления преобразования для каждой из компонент спектра, что является особенностью *wavelet*-преобразования.

В настоящее время *wavelet*-анализ является одним из мощных и гибких средств исследования данных: помимо возможностей сжатия и фильтрации данных, анализ в базисе⁷ *wavelet* – функций позволяет решать задачи идентификации, моделирования, аппроксимации стационарных и нестационарных процессов, исследовать вопросы наличия разрывов в производных, осуществлять поиск точек склеивания данных, удалять в данных тренд, отыскивать признаки фрактальности информации. Методы *wavelet* -анализа не требуют разбиения изображения на маленькие блоки, так как нужные свойства локализации заложены в *wavelet* -систему [6 – 10].

Использовать *wavelet*'ы для преобразования значений пикселей некоторого изображения можно с помощью стандартного разложения [8], для чего применяют одномерное *wavelet* – преобразование к каждой строке значений пикселей. Эта операция дает среднее значение и уточняющие коэффициенты для каждой строки. Затем эти преобразованные строки рассматривают как изображение и

⁶ *Wavelet* означает "маленькая волна", "всплеск". Малость соответствует условию того, что эта функция ("окно") имеет конечную длину. Термин "материнская" подразумевает, что функции с разными носителями, используемые в преобразовании, получены из одной главной функции ("*mother wavelet*"), т.е. материнская волна - прототип для генерации других функций.

⁷ Базис (др.-греч. *βασίς* «основа») – упорядоченный (конечный или бесконечный) набор векторов в векторном пространстве, такой, что любой вектор этого пространства может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации *базисных векторов* из этого набора.



применяют одномерное преобразование к каждому столбцу. Полученные в результате значения окажутся уточняющими коэффициентами, за исключением единственного значения, представляющего собой среднее значение пикселей. Методы *wavelet* – преобразований используют для обработки цветных изображений, выполнив *wavelet* – преобразование независимо на каждом из трех цветных компонентов изображения и представив результаты как массив векторзначных *wavelet* – коэффициентов.

Чтобы функция ψ была *wavelet*'ом, необходимо выполнение условий:

a). функция ψ должна быть локализована во времени (условие квадратичной интегрируемости: ее энергия должна концентрироваться или стягиваться внутри некоторого сегмента), что возможно при выполнении одного из законов убывания:

- $|t|^{-m}$, где $m = \text{const}$;

- более быстрого, чем $|t|^{-m}$;

- экспоненциального $e^{-\alpha|t|}$, где $\alpha > 0$;

b). образ Фурье функции должен быть локализован по частоте;

c). хотя бы первый момент $\mu_0 = \int \psi(t)dt = 0$ должен быть равен нулю;

d). непрерывные функции должны образовывать базис Рисса⁸ (базис Шаудера⁹) на системе Рисса¹⁰.

Свойства вейвлет-преобразования. Результаты *wavelet*-преобразования, как скалярного произведения *wavelet*'а и сигнальной функции, содержат инфор-

⁸ Базис Рисса - такая система Рисса, которая является базисом в H . Базис Рисса является обобщением понятия ортонормированного базиса, а двойное неравенство, данное в определении - обобщение неравенства Бесселя. Другое название базисов Рисса - *базисы, эквивалентные ортонормированным*. Система векторов является базисом Рисса тогда, когда она может быть получена из ортонормированного базиса с помощью ограниченного обратимого преобразования. Любая система Рисса является базисом Рисса в пространстве:

$$V = f = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n, \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \right\},$$

при этом для любого элемента выполняется неравенство:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(f, f_n)|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Любой базис Рисса является безусловным базисом, то есть остаётся базисом после любой перестановки элементов.

⁹ Базис Шаудера (*Schauder basis*) - базис в определении которого рассматриваются и бесконечные линейные комбинации, а именно – разложение в ряды; применяется в основном в функциональном анализе, в частности, для гильбертова пространства.

¹⁰ Система Рисса – такая система векторов $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in H$ в гильбертовом пространстве H с заданными постоянными A и B , что для любой последовательности комплексных чисел $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ сходится по норме в H , причём выполнено:

$$A\|c\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \right\|^2 \leq B\|c\|_{l_2}^2.$$



мацию об анализируемом сигнале и самом *wavelet*'е. Получение объективной информации о сигнале $s(t)$ базируется на свойствах *wavelet* – преобразования $TW[s(t)]$, общих для *wavelet*'ов всех типов.

Линейность.

$$TW[\alpha \cdot s_1(t) + \beta \cdot s_2(t)] = \alpha \cdot TW[s_1(t)] + \beta \cdot TW[s_2(t)].$$

Для векторных функций следует, что TW векторной функции есть вектор с компонентами TW каждой из компонент анализируемого вектора в отдельности.

Инвариантность относительно сдвига сигнала во времени на t_0 приводит к сдвигу *wavelet* – спектра также на t_0 :

$$TW[s(t - t_0)] = C(a, b - t_0).$$

Инвариантность относительно масштабирования в виде растяжения (сжатия) сигнала приводит к сжатию (растяжению) *wavelet* – спектра сигнала:

$$TW[s(t/a_0)] = (1/a_0) \cdot C(a/a_0, b/a_0).$$

Дифференцирование

$$d^n \{ TW[s(t)] \} / dt^n = TW[d^n(s(t)) / dt^n],$$

$$TW[d^n(s(t)) / dt^n] = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} s(t) [d^n(\psi(t)) / dt^n] dt,$$

т.е. безразлично, дифференцировать функцию или анализирующей *wavelet*. Если анализирующей *wavelet* задан формулой, то это может быть полезным для анализа сигналов. Проанализировать особенности высокого порядка или мелкомасштабные вариации сигнала $s(t)$ с игнорированием крупномасштабных полиномиальных составляющих можно дифференцированием нужного числа раз *wavelet*'а или самого сигнала. Это свойство особенно полезно для сигнала в виде дискретного ряда.

Теорема Парсеваля для ортогональных и биортогональных *wavelet*'ов

$$\int_R s_1(t) \cdot s_2^*(t) = C_\psi^{-1} \int_R a^{-2} C(a, b) C^*(a, b) da db,$$

т. е. энергия сигнала вычисляется через коэффициенты *wavelet* -преобразования.

Определения и свойства одномерного непрерывного *wavelet*-преобразования обобщаются на многомерный и на дискретный случаи.

В настоящее время широко используют математический *wavelet* аппарат И. Добеши (*I. Daubechies*) [6, 11, 12], который является расширением преобразования Фурье для описывания нестационарных сигналов и разложения функций по компактным, хорошо локализованным по времени и частоте, ортогональным базисам за линейное время. Под *wavelet* понимаются функции, сдвиги и растяжения которых образуют базис многих важных пространств, в том числе и пространство квадратично интегрируемых функций $L^2(R)$ (гильбертова пространства). Эти функции являются компактными как во временной, так и в частотной области



[13]. *Wavelet* могут быть ортогональными¹¹, биортогональными¹² и неортогональными базисами (базисы Рисса континуальных *wavelet*'ов), но обеспечивать полное восстановление сигнала согласно теорем Добеши [6]. От базиса требуется не столько ортогональность, сколько линейная независимость. Эти функции могут быть симметричными, асимметричными и несимметричными. Различают *wavelet* с компактной областью определения и не имеющих таковой и степенью гладкости.

При этом следует отметить, что при обработке большого объема информации для анализа изображений необходимо сжатия данных, т. е. возможность представить информацию с использованием меньшего количества данных, сохраняя достаточную точность для осуществления нужной идентификации. Любое разложение по *wavelet* - функциям обладает свойством полного восстановления [6]. Для этого не обязательно, чтобы разложение было только дискретным. Континуальное преобразование подразумевает полное восстановление по функции *CWT* в базисе Рисса. Текущий промышленный стандарт сжатия изображения, написанный объединенной группой (Мейер, Гроссман и Добеши) фотографических экспертов (*Joint Photographic Expert Group*), называется *JPEG* (файлы изображений, сжимаемые с помощью этого стандарта, имеют расширение *.jpg*). Применение *wavelet*-преобразования расширяет возможности цифровой обработки нестационарных сигналов, создавая эффективные алгоритмы сжатия и шумоочистки сигналов. Новый стандарт сжатия изображений *JPEG2000* основан на *wavelet*-преобразовании.

Из первых отечественных публикаций можно отметить [12, 13], а также перевод работы И. Добеши "*Ten lectures on wavelet*" [6].

Математическое определение непрерывного *wavelet*-преобразования. Математическое определение непрерывного *wavelet*-преобразования имеет вид:

$$s(x) \rightarrow S(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_{ab}}(x) s(x) dx, \quad (1)$$

где s – сигнал, и ψ_{ab} – анализирующая функция (мы обозначаем переменную времени за x). Для преобразования Фурье и для *CWT*, функция анализа ψ_{ab} получена действием группы преобразова

¹¹ Ортогональное преобразование – линейное преобразование A евклидова пространства L , сохраняющее длины или (что эквивалентно) скалярное произведение векторов, т.е. для любых двух векторов $x, y \in L$ выполняется равенство

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle,$$

где треугольными скобками обозначено скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ в пространстве L .

¹² Биортогональные *wavelet*'ы суть пары функций, по одной из которых ведется анализ сигнала, по другой восстановление. Если один из биортогональных *wavelet*'ов обладает гладкостью r , то парный ему *wavelet* автоматически приобретает r нулевых моментов. Биортогональные *wavelet*'ы особенно хороши для анализа сигналов и изображений с целью их сглаживания: чем больше гладкость *wavelet*'а, тем большую часть ВЧ полосы он срезает, и наоборот, чем больше число нулевых моментов *wavelet*'а, тем большее число сингулярностей сигнала (изображения) *wavelet* позволяет аппроксимировать.



Действие a на функции Ψ : расширение (при $a > 1$), или сжатие (при $a < 1$), b – перенос (рис. 1).

В отличие от CWT , при $STFT \psi_{ab}$: $\psi_{ab}(x) = e^{ix/a} \psi(x - b)$, т.е. зависимость от a – это модуляция ($1/a \sim$ частота); окно имеет постоянную ширину, но чем ниже a ,

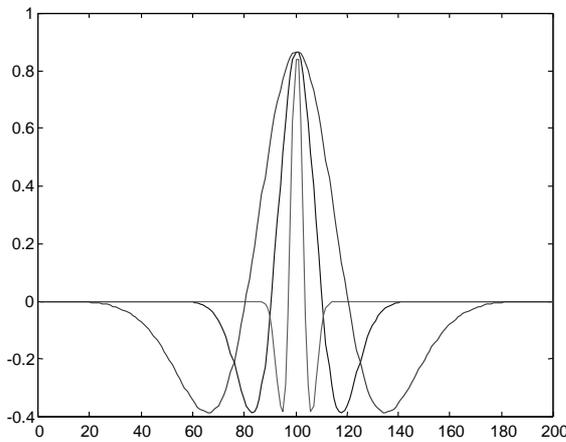


Рис.1. Сжатая и растянутая версия материнского wavelet Mexican Hat в зависимости от параметра a .

тем большее число колебаний в окне ψ . Термин "сдвиг" имеет тот же смысл, что и в $STFT$; он определяет местонахождение окна по оси времени, по мере того как окно сдвигается. Однако, того частотного параметра, который был в $STFT$, теперь нет. Вместо этого появился масштаб, который определяется как $1/\text{частота}$. Частота в большей степени специфична для $STFT$. В терминах частоты, низкая частота (крупный масштаб) соответствует общей информации о сигнале, в то время как высокая частота (мелкий масштаб) соответствует подробной информации о скрытых особенностях сигнала (обычно продолжается не очень долго). Масштабирование растягивает либо сжимает сигнал. Крупный масштаб соответствует растянутому сигналу, а более мелкий – сжато. По заданной функции $f(t)$ можно построить функцию $f(at)$, являющуюся сжатой версией исходной при $a > 1$, и растянутой версией $f(t)$ при $a < 1$. В определении wavelet-преобразования масштаб стоит в знаменателе, поэтому выполняется обратное преобразование, т.е. $a > 1$ растягивает сигнал, а $a < 1$ – сжимает.

CWT задается базисной формулой преобразования вида (1) и (2):

$$S(a, b) = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(a^{-1}(x - b))s(x)dx, \quad (3)$$

где $a > 0$ – параметр масштаба и $b \in \mathbb{R}$ – параметр сдвига. В соотношении (3) s – сигнал с конечной энергией, и функция ψ , анализирующий wavelet, считается хорошо локализованным и в области времени и в области частоты. ψ должен удовлетворять условию допустимости, которое гарантирует обратимость CWT и может быть сокращено к требованию, что ψ имеет среднее значение равно нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0.$$

Так как Ψ_{ab} действует подобно фильтру (как свертка), то $CWT: s \rightarrow S$ обеспечивает локальную (полосовую) фильтрацию как в пространстве (b) и по масштабу (a). Объединяя эти особенности с локализирующими свойствами $\psi(t)$ и ее преобразованием Фурье $\hat{\psi}(w)$ получаем, что CWT работает в постоянной относительной ширине полосы частот ($\Delta w/w = \text{const}$). Это более эффективно в высокой частоте, то есть при малых масштабах для обнаружения особенностей в сигнале.

Преобразование $W_{\Psi}: s(x) \rightarrow S(a, b)$ может быть точно инвертировано:



$$s(x) \approx \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-0a^2}^{\infty} \frac{da}{a^2} \Psi_{ab}(x) S(a, b).$$

Это означает, что *CWT* обеспечивает декомпозицию сигнала, как линейную суперпозицию *wavelet*-ов Ψ_{ab} с коэффициентами $S(a, b)$.

Из (3) *CWT*-проекция сигнала, в смысле L^2 , на совокупность $\{\Psi_{ab}, a > 0, b \in R\}$, сгенерированных из функции Y переносом и расширением:

$$S(a, b) = \langle \Psi_{ab} / s \rangle = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(a^{-1}(x-b))s(x)dx = a^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}(aw)s(w)e^{ibw} dw, \quad (4)$$

$\hat{\Psi}$ – преобразование Фурье. Таким образом преобразование $S(a, b)$ лежит в полу-плоскости $R^2_+ = \{a > 0, b \in R\}$. *Wavelet* Ψ должен удовлетворять ряду условий.

1). Для корректности формулировки $\Psi(x)$ и $\hat{\Psi}(w)$, должен быть квадратично интегрируем: $\Psi \in L^2(R)$

2). Ψ должен быть допустимым, то есть интеграл

$$c_{\Psi} \equiv 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty$$

должен сходиться. Это условие подразумевает

$$\hat{\Psi}(0) = 0,$$

что эквивалентно условию равенства нулю среднего значения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) dx = 0.$$

3). Чтобы получать эффективное преобразование, т.е. эффективную полосовую фильтрацию, и в пространстве времени и в пространстве частоты $\Psi(x)$ и $\hat{\Psi}(w)$ должны быть локализованы, Ψ должно быть интегрируемо $\Psi \in L^1 \cap L^2$.

4). К условию 2 может требоваться, чтобы Ψ имело некоторое число обращений в нуль моментов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \Psi(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

(Это свойство улучшает эффективность Ψ при обнаружении особенностей в сигнале, так как это слепо к многочленам до порядка N).

5). Часто требуется, чтобы $\hat{\Psi}(w)$ было вещественно, и $\hat{\Psi}(w) = 0$ для $w < 0$ (такой Ψ также называется аналитическим сигналом или функцией Харди¹³).

Wavelet Ψ удовлетворяющий, этим требованиям генерируется из (4) преобразованием $W_{\Psi}: s(x) \rightarrow S(a, b)$, которое производит хороший анализ сигнала, и обеспечивает эффективное восстановление $S(a, b) \rightarrow s(x)$ сигнала из преобразования.

¹³ Функция Харди $Z(t)$ – классическая функция [14] определяется как

$$Z(t) := \zeta(1/2 + it)(\chi(1/2 + it))^{-1/2},$$

где $\chi(s)$ – множитель, возникающий из функционального уравнения для $\zeta(s)$ [15], а именно: $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$ для всех $s \in C$, т.е.

$$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(1/2 \pi s) \Gamma(1-s), \quad \chi(s)\chi(1-s) = 1.$$



Два наиболее часто используемых практически *wavelet*-а – это *Mexican Hat* и *wavelet Morlet*-а.

МНАТ – *wavelet* (*Mexican hat* – мексиканская шляпа) вычисляется по вто-

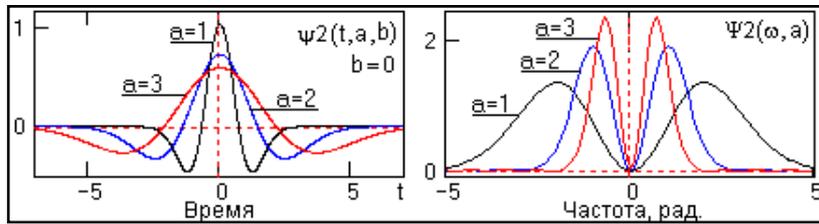


Рис. 2. *Wavelet* МНАТ.

рой производной ($n=2$) и приведен на рис. 2. *Wavelet* симметричен, спектр *wavelet*'а представлен действительной частью и хорошо локализован по ча-

стоте, нулевой и первый моменты *wavelet*'а ($n=0,1$) равны нулю. Уравнение вейвлета:

$$\psi(t, a, b) = \frac{1,031}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp \left[-\left(\frac{t-b}{a} \right)^2 \right] - 2 \left(\frac{t-b}{a} \right)^2 \cdot \exp \left[-\left(\frac{t-b}{a} \right)^2 \right] \right\}.$$

Вейвлет-преобразования Морле (*Morlet wavelet*) (рис. 3)– это модулированный Гауссиан и описывается уравнением

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-b)^2}{2a^2}} \cdot e^{j2\pi \frac{(t-b)}{a}},$$

где a – масштаб (сжатие, растяжение), b – временное смещение по сигналу.

Morlet wavelet комплексен и соответствующее преобразование $S(a, b)$ – также комплексно, и можно рассматривать отдельно фазу и модуль. Фаза преобразования – определяющий компонент алгоритма обнаружения особенностей в сигнале.

Базис вейвлет-преобразования Габора (*Gabor wavelet*) (рис. 4) в общем виде можно определить как:

$$q(x', y', \lambda, \sigma, \xi, \nu, \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\left(\frac{x'^2}{2\sigma^2\lambda^2} - \frac{y'^2}{2\sigma^2} \right)} \cdot e^{j2\pi x' \sqrt{\xi^2 + \nu^2}},$$

где λ – соотношение сторон эллиптического Гауссова окна, σ – параметр масштаба, ξ, ν – модулирующие частоты преобразования Фурье, θ – ориентация фильтра, x', y' пространственные координаты, повернутые на угол θ :

$$(x', y') = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta).$$

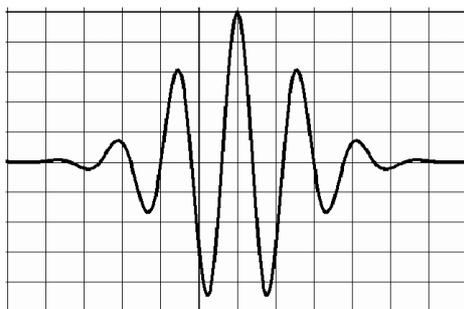


Рис. 3. *Wavelet* Morlet

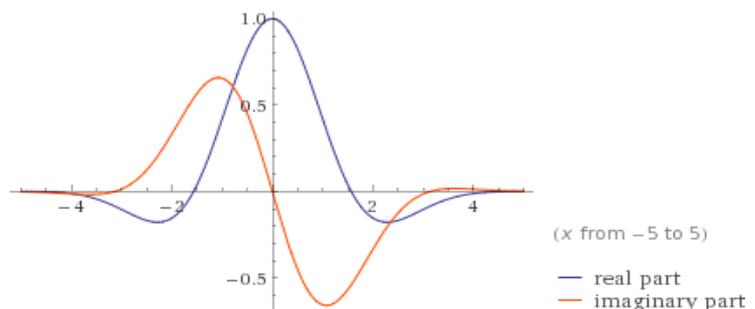


Рис. 4. *Wavelet* Gabor

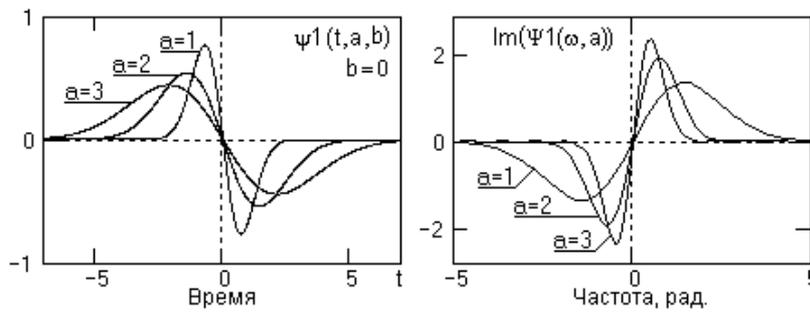


Рис. 5. Wavelet Wave.

Wave – *wavelet* (рис. 5) во временной и частотной области для трех значений масштабных коэффициентов 'a') вычисляется по первой производной ($n=1$). Форма *wavelet*'а относится к нечетным функциям и, соответ-

ственно, спектр *wavelet*'а является мнимым. Уравнение *wavelet*'а имеет вид:

$$\psi(t, a, b) = \frac{-1,786}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t-b}{a} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right].$$

Контурная масштабно – временная картина *wavelet*'ных коэффициентов, а равно и ее сечения на больших значениях масштабных коэффициентов 'a' (малых доминирующих частотах *wavelet*'ов) точно и уверенно фиксирует положение вершины информационного сигнала сменой знака коэффициентов $C(a, b)$.

Для большинства континуальных¹⁴ *wavelet*'ов роль функции, концентрирующей энергию на некотором интервале, играет затухающая Гауссова функция:

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ где } \sigma, \mu \text{ – СКО и математическое ожидание или ее производные.}$$

Частотный состав *wavelet*'а задаётся комплексной экспонентой.

Взаимосвязь между масштабом *wavelet*'а и его собственной частотой – обратная пропорциональность собственной частоты и масштаба, взвешенная неко-

торым коэффициентом пересчета: $\omega = \frac{k}{a}$, где ω – собственная частота, a – масштаб.

Коэффициент пересчета k рассчитывается либо простым наложением гармоник известной частоты на *wavelet*-спектр этой гармоник, либо выбирается из таблицы коэффициентов пропорциональности. Так, например, для *wavelet*'а

"сомбреро" $k = \sqrt{\frac{5}{2}}$, для *wave*-функции – $k = \sqrt{\frac{3}{2}}$. *Wavelet*-функция – это полосовой фильтр, настроенный на какую-либо частоту пропускания. Так *wavelet Morlet*

настраивается на нужную частоту в виде $e^{-j\omega t - \frac{t^2}{2}}$, где ω – частота нужной гармоники.

Свойства CWT

Главными достоинствами *CWT* являются их локализирующие свойства поскольку ψ имеет компактный носитель и ψ и $\hat{\Psi}$ должны быть локализованы, насколько возможно. Объединяя эти локализирующие свойства с условием нулевого

¹⁴ Континуальный –определённый на всех точках числовой оси или её отрезка.



среднего и факт того, что ψ_{ab} действует подобно фильтру (свертка), *CWT* выполняет локальную фильтрацию и во времени и по масштабу для обнаружения особенностей и свойств, зависящих от масштаба, в частности для анализа фракталов.

Допустимому *wavelet*'у ψ , для которого $c_\psi < \infty$, соответствует *CWT* W_ψ : $s(x) \rightarrow S(a, b)$ – линейное отображение, со следующими свойствами:

(1) W_ψ – ковариантно¹⁵ при переносе и расширении (изменение масштаба):

$$W_\psi : s(x - x_0) \rightarrow S(a, b - x_0)$$

$$W_\psi : \frac{1}{\sqrt{a_0}} s\left(\frac{x}{a_0}\right) \rightarrow S\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right)$$

(2) W_ψ сохраняет энергию сигнала:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(x)|^2 dx = c_\psi^{-1} \iint_{R_+^2} |S(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2}. \quad (5)$$

Соотношение (5) означает, что отображение W_ψ изометрия¹⁶ из пространства сигналов $L^2(R)$ на закрытое подпространство $L^2(R_+^2, dad b/a^2)$.

(3) Как следствие, отображение W_ψ обратимо, и обратное преобразование – сопряженное с W_ψ и сигнал $s(x)$ можно восстановить из преобразования формулой:

$$s(x) = c_\psi^{-1} \iint_{R^2} \psi_{ab}(x) S(a, b) \frac{dad b}{a^2}, \quad (6)$$

т.е. *CWT* обеспечивает разложение сигнала как линейное наложение *wavelet*-ов Ψ_{ab} с коэффициентами $S(a, b)$.

(4) Проекция из $L^2(R_+^2, dad b/a^2)$ на W_ψ , то есть пространство *wavelet* преобразований, является составным оператором, чьё ядро

$$K(a', b'; a, b) = c_\psi^{-1} (\Psi_{a'b'} | \Psi_{ab})$$

является автокорреляционной функцией ψ и называется воспроизводящим ядром, потому, что функция $f \in L^2(R_+^2, dad b/a^2)$ – это *CWT* некоторых сигналов тогда и только тогда, когда она удовлетворяет свойству воспроизведения:

$$f(a'b') = \iint_{R^2} K(a', b'; a, b) f(a, b) \frac{dad b}{a^2}.$$

¹⁵ Ковариантность и контравариантность - используемые в математике (линейной алгебре, дифференциальной геометрии, тензорном анализе) и в физике понятия, характеризующие то, как тензоры (скаляры, векторы, операторы, билинейные формы и т. д.) изменяются при преобразованиях базисов в соответствующих пространствах или многообразиях. Контравариантными называют «обычные» компоненты, которые при смене базиса пространства изменяются с помощью преобразования, обратного преобразованию базиса. Ковариантными - те, которые изменяются так же, как и базис.

¹⁶ Изометрия – биекция между метрическими пространствами, сохраняющая расстояния между точками, если для любых

$$|f(x) - f(x')|_Y = |x - x'|_X,$$

где обозначает расстояние между x и x' в пространстве.



Соотношение (6) означает, что *wavelet* ψ , используется и для анализа и для восстановления, но можно восстанавливать сигнал, используя *wavelet* с отличающийся от анализирующего *wavelet*-а ψ :

$$s(x) = c_{\chi\psi} \iint_{R^2} \chi_{ab}(x) (W_{\psi} s)(a, b) \frac{dad b}{a^2}$$

если s и ψ удовлетворяют условию совместимости

$$0 < \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(w) \hat{\chi}(w) \frac{dw}{|w|} \right| < \infty.$$

Эффект денойзинга *wavelet* 'а

В работе [16] исследованы алгоритмы *wavelet* фильтрации и методы сокращения коэффициентов *wavelet* разложения сигнала, а также их влияние на степень подавления шума. Метод обработки спектров сигналов на основе *wavelet* -анализа и привлечения априорной информации о шуме с использованием количественных характеристик шума (КХШ) улучшает качество обработки с малым отношением сигнал/шум, сложной формой спектральных контуров и коррелированной структурой шума.

Для получения априорной информации для *wavelet* -анализа об экспериментальных сигналах используют несколько параметров наблюдаемого процесса и на основе их совокупного анализа делается вывод о структуре исследуемого явления. При этом используется следующий комплекс КХШ: фрактальная размерность¹⁷, показателя Херста¹⁸, относительной дисперсии, энтропии, как экспериментального КХШ, и *wavelet* – анализа, который позволяет улучшить качество обработки спектров сигналов. С увеличением коррелированности шума происходит рост параметра Херста, уменьшение значений относительной дисперсии и фрактальной размерности. КХШ, кроме энтропии, инвариантны относительно амплитуды шума.

Wavelet – анализ является эффективным инструментом обработки сложных и нестационарных сигналов и может быть использован при математической обработке спектров сигналов. При этом совместное использование КХШ и *wavelet* -анализа позволяет проводить эффективный анализ спектров с целью получения дополнительной информации о экспериментальном шуме при малом отношении сигнал/шум.

¹⁷ Фрактальная размерность временных рядов определяется тем, как объект или временной ряд заполняет пространство и включает подсчет объема или площади фрактальной формы и как она изменяется в масштабах в том случае, если этот объем или форма увеличиваются.

¹⁸ Показатель степени Хёрста (показатель Хёрста, коэффициент Хёрста H) – мера, используемая в [анализе временных рядов](#), и определяется в терминах асимптотического поведения масштабированного диапазона как функции отрезка времени временного ряда в виде:

$$E \left[\frac{R(n)}{S(n)} \right] = Cn^H, \quad n \rightarrow \infty,$$

где размах накопленных отклонений первых значений от среднего значения ряда, – стандартное отклонение; – математическое ожидание; – величина промежутка времени (количество точек в отрезке временного ряда); – константа.



При обработке сигналов в случае малого отношения сигнал/шум и сложной спектральной структуры шума простым способом учета влияния искажений с использованием *wavelet*-анализа является удаление определенных масштабов, которые содержат шумовую компоненту сигнала. Причем оценка решения $\tilde{\varphi}$ запишется как:

$$\tilde{\varphi} = W^{-1}R(j, j_{гр}, k)Wf.$$

где f –обрабатываемый сигнал, W –дискретное *wavelet* – преобразование, W^{-1} – обратное дискретное вейвлет-преобразование, $R(j, j_{гр}, k)$ – функция аподизации¹⁹, зависящая от масштаба j и сдвига k *wavelet* –преобразования сигнала в виде:

$$R(j, j_{гр}, k) = \begin{cases} 1, & j \geq j_{гр}, \forall k, \\ 0, & j < j_{гр}, \forall k, \end{cases}$$

где $j_{гр}$ – граничный масштаб. Параметр $j_{гр}$ в данном случае определяет масштаб, который разделяет полезную составляющую сигнала и его шумовую компоненту. В качестве критерия для выбора граничного масштаба можно использовать минимум спектра мощности *wavelet* –преобразования.

При использовании *wavelet* – анализа в задаче обработки экспериментальных данных возникает вопрос о качестве восстановления сигнала, которое зависит от вида используемого *wavelet*'а в качестве базиса²⁰. Многообразие базисных *wavelet*'ов предоставляет гибкость при их выборе с целью достижения наилучшего результата, а неверный выбор базисного *wavelet*'а может привести к менее достоверному представлению результатов математической обработки экспериментальных данных. От выбора базиса зависит результат обработки информации по критерию минимума энтропии. Чем меньше значение энтропии коэффициентов разложения $\exp(-\sum \sum (d_{j,k})^2 \log d_{j,k}^2)$, суммируемых по номерам коэффициентов и уровням их размещения, тем оптимальнее для исследуемых данных базис анализа.

В случае обработки спектров сигналов, которые характеризуются высоким уровнем шума, использовать схемы создания базисных *wavelet*'ов, адаптированных к форме обрабатываемого сигнала, является затруднительным. При этом создается модельный сигнал, подобный по форме экспериментальным данным, которые планируется подвергнуть математической обработке. После обработки модельных данных определяется качество восстановления сигнала σ . Выбор базисного *wavelet*'а осуществляется из условия минимума отклонения восстановленного сигнала от истинного, т.е. определяется базисный *wavelet*, вносящий наименьшие искажения в обрабатываемый сигнал.

¹⁹ Аподизация (греч. α (отрицание) и подо (подошва)) – процесс подавления побочных экстремумов в аппаратных функциях. Аппаратная функция умножается на функцию аподизации (или весовую функцию), чтобы сгладить ложные боковые максимумы, которые появляются в полученном спектре при замене бесконечных пределов на конечные пределы изменения оптической разности хода.

²⁰ Базис (др.-греч. βασις «основа») – упорядоченный (конечный или бесконечный) набор векторов в векторном пространстве, такой, что любой вектор этого пространства может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов из этого набора. Векторы базиса называются *базисными векторами*.



Для удаления шума применяется итерационная схема на *wavelet*-пространстве с использованием априорной информации о характере шума, искажающего экспериментальные данные, в которых по известному приближению ищется следующее, более точное приближение. Итерационные методы находят широкое применение в практике восстановления сигналов, так как в некоторых случаях они допускают простой учет важных для задач восстановления ограничений непосредственно в схеме итерационного алгоритма и тем самым представляют собой альтернативу методам нелинейного программирования.

Схема предлагаемого итерационного удаления шума принимает вид:

$$\varphi^{(i+1)} = W^{-1} \theta W \varphi^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где в качестве первого приближения используется экспериментальный сигнал $\varphi^{(0)} = f$, W – дискретное *wavelet* – преобразование, W^{-1} – обратное дискретное *wavelet*

– преобразование, $\theta w_{jk} = \begin{cases} w_{jk} - \tau, & \text{если } w_{jk} \geq \tau, \\ w_{jk} + \tau, & \text{если } w_{jk} \leq -\tau, \\ 0, & \text{в др. случаях} \end{cases}$ – оператор ограничения *wavelet*–

коэффициентов, τ – величина порога, $w_{jk} = W\varphi$ – коэффициенты дискретного *wavelet* – преобразования сигнала φ .

Увеличение на каждом шаге итерации величины порога на некоторое значение δ позволяет эффективно удалять шум. Для принятия решения об остановке итерационного процесса можно использовать априорную информацию о шуме. Производится процедура вычисления количественной характеристики M_j – на каждом масштабе для удаляемого шума. В качестве параметра M_j могут выступать показатель Херста, относительная дисперсия и фрактальная размерность. После этого производится сравнение величины M_j с априорно известным значением $M_{j\text{апр}}$, рассчитываемым по шуму. Если $M_j \approx M_{j\text{апр}}$, то итерационный процесс прерывается и производится восстановление сигнала:

$$\varphi = W^{-1} w_{jk}.$$

В противном случае выполняется следующая итерация, что позволяет произвести восстановление формы сигнала в случае малого отношения сигнал/шум и коррелированной структуры шума.

Выводы

Основные задачи исследований включают в себя:

1. Исследование возможности применения фрактальная размерность, показателя Херста, относительной дисперсии и энтропии при обработке изображения для получения априорной информации в случае малого отношения сигнал/шум, что позволяет получить более полную информацию о свойствах экспериментального шума.

2. Разработка и исследование оптимальных (с минимально возможной СКО) и квазиоптимальных алгоритмов вейвлет-фильтрации сигналов и изображений определяется корректным выбором базисного *wavelet*'а в задаче удаления шума из экспериментальных данных.

3. Исследованы возможности использования *wavelet* -анализа при обработке спектров сигналов с малым отношением сигнал/шум, искаженных коррелированным шумом.



4. Проведено исследование эффективности восстановления сигналов с использованием различных базисных *wavelet*'ов семейств койфлетов, *wavelet*'ов Добеши и биортогональных *wavelet*'ов. Показано, что койфлет пятого порядка вносит наименьшие искажения в сигнал.

5. С помощью дискретного *wavelet* -анализа возможно удаление высокочастотного шума без привлечения априорной информации о структуре шума.

6. Разработанный метод удаления шума, основанный на применении итерационной схемы в *wavelet* -пространстве, позволяет восстановить сигнал в случае коррелированной структуры шума.

Список цитируемой литературы

1. Алатар А. И., Михайлов А. А. Технология решения задачи проектирования информационных систем восстановления динамических изображений//Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», №2 (2018) ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4874.
2. Бейтс Р., Мак-Доннелл М. Восстановление и реконструкция изображений. – М.: Мир. –1989.
3. Прэрт У. Цифровая обработка изображений. В 2-х т. М.: Мир, 1982.
4. Рудаков П.И., Сафонов В.И. Обработка сигналов и изображений. MATLAB 5.x / Под общ. ред. В.Г. Потемкина. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2000.
5. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. СПб: Питер, 2002.
6. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2001. –464 с.
7. Мала С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Мала. – М.: Мир. 2005. –671 с.
8. Столниц Э. Вейвлеты в компьютерной графике / Э. Столниц, Т. ДеРоуз, Д. Салезин. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». –2002. –272 с.
9. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения / Н. М. Астафьева //УФН. 1996. Т. 166, № 11. –С. 1145–1170.
10. Дремин И.М. Вейвлеты и их использование / И.М. Дремин, О.В. Иванов, В.А. Нечитайло //УФН. 2001. Т. 171, № 9. –С. 940–985.
11. Strang G., Nguyen T. Wavelets and Filters Banks. - Wellesley-Cambridge-Press 1996. - 490 p.
12. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования.-СПб.:Изд-во ВУС. –1999. –208 с.
13. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. – СПб.: Изд-во СПбГТУ.- 1999.- 132 с.
14. Ivić A., The theory of Hardy's Z-function, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013 Zentralblatt MATH
15. Ivić A., The Riemann zeta-function, J. Wiley & Sons, New York, 1985 MathSciNet MathSciNet Zentralblatt MATH
16. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения. Успехи физических наук, Ноябрь 1996. Том 166, № 11. –С. 1145–1170